



САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «ПОЖАРНО-СПАСАТЕЛЬНЫЙ КОЛЛЕДЖ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ЦЕНТР ПОДГОТОВКИ СПАСАТЕЛЕЙ»

Мисяр Н.Н., Пивень А.В.

**ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ.
ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И
НЕРАВЕНСТВА.
СИСТЕМЫ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Санкт-Петербург 2023

Авторы-составители: Мисяр Наталья Николаевна, преподаватель математики высшей категории; Пивень Анна Валентиновна, преподаватель математики.

Логарифмическая функция. Логарифмические уравнения и неравенства. Системы логарифмических уравнений: учебно-методическое пособие / Н.Н. Мисяр, А.В.Пивень. – СПб: Санкт-Петербургский Пожарно-спасательный колледж, 2023. – 31с.

Данное учебно-методическое пособие рекомендовано для студентов первого курса колледжа для закрепления теоретических знаний, приобретения навыков в решении задач и самопроверки

Оглавление

Пояснительная записка.....	3
Введение.....	4
Определение логарифмов.....	5
Свойства логарифмов.....	9
Дифференцированный набор заданий для систематизации знаний «Свойства логарифма»	13
Логарифмическая функция.....	17
Основные типы логарифмических уравнений.....	18
Примеры логарифмических уравнений для самостоятельного решения.....	21
Тест по теме «Логарифмические уравнения»	22
Набор заданий для систематизации знаний для решения логарифмических уравнений.....	26
Логарифмические неравенства.....	29
Заключение.....	31
Список литературы.....	32

Пояснительная записка

Изобретение логарифмов, сократив вычисления
нескольких месяцев в труд нескольких дней,
словно удваивает жизнь астрономов.

П.С. Лаплас

Учебно-методическое пособие по теме «Логарифмическая функция» предназначена для преподавателей и студентов 1 курса СПО, обучающихся на базе основного общего образования. Пособие рассчитано на изучение и закрепление полученных знаний и навыков. Задачи представлены по принципу «от простого – к сложному». Прежде чем приступать к решению задач, рекомендуется изучить представленный теоретический материал с разобранными примерами.

Пособие интересно тем, что для изучения, закрепления, а также контроля разработаны и подобраны материалы разных видов.

Данное методическое пособие поможет студентам при изучении логарифмов. В пособии приводятся определение логарифма, свойства, основные формулы, а также примеры решения логарифмов, логарифмических выражений, логарифмических уравнений и неравенств, и их систем.

Пособие могут использовать в своей работе и преподаватели с целью организации аудиторной и самостоятельной работы:

- систематизации, закрепления и углубления, полученных теоретических и практических знаний, умений;
- формирования умений применять теоретические знания;
- развития самостоятельности и организованности студентов;

Введение

Первая встреча с логарифмами не вызывает особой радости и энтузиазма, логарифм невольно ассоциируется с чем-то трудным. Многие ворчат: «Ну, кому понадобились эти логарифмы.

Логарифмы – важные составляющие не только математики, но и всего окружающего мира, поэтому интерес к ним не ослабевает с годами. Логарифмы появились как средство для упрощения вычислений еще в 16 веке, когда система вычислений и техника была слабо развита. Логарифмы используют, и сегодня, потому что они позволяют: значительно упрощать математические вычисления, легко сравнивать между собой произведения больших величин. Логарифмы имеют непосредственное отношение к физике, астрономии, психологии, истории и многочисленным смежным наукам.

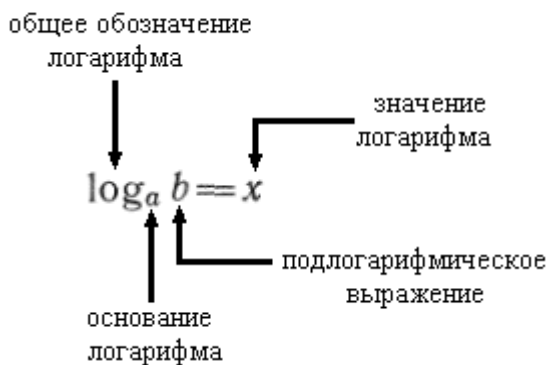
Математика – не единственная дисциплина, где используются логарифмы. Часто, даже не подозревая об этом, мы пользуемся ей в других науках. Например:

- интенсивность звука (децибелы) в физике;
- шкала яркости звёзд в астрономии;
- активность водородных ионов (рН) в химии;
- шкала Рихтера для определения интенсивности землетрясения в сейсмологии;
- логарифмическая шкала времени в истории.

Поэтому логарифмы появились исходя из практических нужд человека, и имеют непосредственное отношение многочисленным открытиям в различных областях науки.

Определение логарифма.

Определение: Логарифмом положительного числа b по основанию a , где $a \neq 1, a > 0$, называется показатель степени, в которую нужно возвести число a , чтобы получить число b .



Пример 1: Вычислить $\log_3 81$.

Для вычисления удобно записывать следующим образом: $\log_3 81 = x$. Тогда воспользуемся определением логарифма и получим показательное уравнение: $3^x = 81$, решая его, получаем $3^x = 3^4$, тогда $x=4$, так как $3^4 = 81$. Значит, $\log_3 81 = 4$

Пример 2: Вычислить $\log_{16} 64$.

Обозначим $\log_{16} 64 = x$. Тогда по определению логарифма получаем: $16^x = 64$. Решим полученное уравнение: $4^{2x} = 4^3$, $2x = 3$, $x = 1,5$. Ответ: $\log_3 81 = 1,5$.

Пример 3: Вычислить $\log_4 \sqrt{128}$.

Обозначим $\log_4 \sqrt{128} = x$. Тогда по определению логарифма получаем: $4^x = \sqrt{128}$. Решим полученное уравнение, используя формулу $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ получаем $4^x = 128^{\frac{1}{2}}$, $2^{2x} = (2^7)^{\frac{1}{2}}$, $2^{2x} = 2^{\frac{7}{2}}$, $2x = \frac{7}{2}$, $x = \frac{7}{4}$.

Ответ: $\log_4 \sqrt{128} = \frac{7}{4}$.

Из определения логарифма следует основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a b} = b,$$

где $b > 0, a > 0, a \neq 1$. Действие нахождения логарифма числа называется логарифмированием.

Например: $3^{\log_3 6} = 6$; $\frac{2^{\log_2 4}}{5^{\log_5 4}} = 4$

Пример 4: Вычислить $2^{2\log_2 6}$.

Чтобы решить данный пример, мы будем использовать свойство степени $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}$ и основное логарифмическое тождество, получаем

$$2^{2\log_2 6} = (2^{\log_2 6})^2 = 6^2 = 36$$

Ответ: $2^{2\log_2 6} = 36$.

Пример 5: Вычислить $16^{\log_2 5}$.

Используя свойство степени и основное логарифмическое тождество, получаем

$$16^{\log_2 5} = 2^{4\log_2 5} = (2^{\log_2 5})^4 = 5^4 = 625$$

Ответ: $16^{\log_2 5} = 625$.

Пример 6: Решить уравнение: $\log_3(2x - 5) = 3$.

По определению логарифма получаем $2x - 5 = 3^3$, тогда $2x = 27 + 5$,

$2x = 32$, $x = 16$.

Ответ: 16.

Дифференцированный набор заданий по теме «Определение логарифма»

1 вариант	2 вариант	3 вариант
Вычислить	Вычислить	Вычислить
$\log_3 1$	$\log_3 3$	$\log_{11} 121$
$\log_{12} 144$	$\log_4 256$	$\log_2 2$
$\log_9 729$	$\log_{13} 169$	$\log_{25} 1$
$\log_7 7$	$\log_{16} 32$	$\log_7 343$
$\log_{25} 125$	$\log_8 512$	$\log_6 216$
$\log_8 4096$	$\log_2 1$	$\log_5 25$
$\log_3 81$	$\log_2 32$	$\log_4 32$
$\log_8 64$	$\log_9 27$	$\log_3 243$
$\log_{37} 1$	$\log_{625} 25$	$\log_7 1$
$\log_{27} 9$	$\log_{17} 1$	$\log_{216} 36$

1 вариант	2 вариант	3 вариант
Вычислить	Вычислить	Вычислить
$\log_3 \frac{1}{3}$	$\log_3 \frac{1}{9}$	$\log_{11} \frac{11}{121}$
$\log_{\frac{1}{12}} 144$	$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{256}$	$\log_2 \frac{1}{2}$
$\log_{\frac{1}{9}} \frac{3}{729}$	$\log_{13} \frac{13}{169}$	$\log_{25} \frac{1}{5}$
$\log_{\frac{1}{7}} 7$	$\log_{0,1} \frac{1}{100}$	$\log_{\frac{1}{49}} \frac{1}{343}$
$\log_{\frac{1}{25}} \frac{1}{5}$	$\log_{\frac{1}{8}} \frac{2}{128}$	$\log_{0,04} \frac{1}{25}$
$\log_{0,0001} \frac{1}{10}$	$\log_2 0,008$	$\log_{10} 0,0001$
$\log_{\frac{1}{81}} 3$	$\log_{0,2} 25$	$\log_4 \frac{1}{32}$
$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{64}$	$\log_9 \frac{1}{81}$	$\log_{0,3} \frac{100}{9}$
$\log_3 \frac{1}{27}$	$\log_{\frac{1}{125}} 25$	$\log_{\frac{1}{23}} 23$
$\log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{27}$	$\log_{17} \frac{1}{17}$	$\log_{\frac{1}{6}} 36$

1 вариант	2 вариант	3 вариант
Вычислить	Вычислить	Вычислить
$2^{2 \log_2 3}$	$9^{\log_3 2}$	$25^{\log_5 4}$
$\log_{0,5} \sqrt{2}$	$\log_{0,5} \sqrt{8}$	$\log_{0,5} \sqrt{32}$
$\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{2}$	$\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[4]{2}$	$\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[6]{2}$
$4^{\log_2 \sqrt{3}}$	$9^{\log_3 \sqrt{3}}$	$25^{\log_5 \sqrt{3}}$
$\log_{\sqrt{5}} 125$	$\log_{\sqrt{8}} 512$	$\log_{\sqrt{6}} 216$
$\log_{\frac{1}{3}} 3 \cdot \sqrt{27}$	$\log_{\frac{1}{2}} 4 \cdot \sqrt{2}$	$\log_{\frac{1}{5}} 5 \cdot \sqrt{125}$
$\log_{\frac{2}{3}} \frac{81}{16}$	$\left(\frac{1}{27}\right)^{\log_3 4}$	$\left(\frac{1}{25}\right)^{\log_5 6}$
$\log_{\frac{2}{3}} \frac{81}{16}$	$\log_9 \frac{16}{81}$	$\log_{\frac{81}{16}} \frac{3}{4}$
$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{\log_5 2}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\log_3 4}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^{\log_6 9}$
$\log_{\sqrt{27}} 9$	$\log_{\sqrt{15}} 225$	$\log_{\sqrt{216}} 36$

Свойства логарифмов

1. $\log_a a = 1, \quad a \neq 1; \quad a > 0.$

Пример: Вычислить $\log_4 4$.

Применяя первое свойство $\log_4 4 = 1$. Важно запомнить, что логарифм по основанию a от этого же основания всегда равно 1. Это выражение называется логарифмической единицей.

Ответ: 1.

2. $\log_a 1 = 0, \quad a \neq 1; \quad a > 0.$

Пример: Вычислить $\log_2 1$.

Применяя первое свойство $\log_2 1 = 0$. Важно запомнить, логарифм по любому основанию всегда равен 0. Это выражение называется логарифмическим нулем.

Ответ: 0.

3. $\log_a bc = \log_a b + \log_a c, \quad a \neq 1; \quad a > 0; \quad b > 0; \quad c > 0.$

В этом свойстве важно запомнить, что основания суммирующихся логарифмов должно быть одинаковым. Если основания разные, свойства нельзя применить.

Пример: Найти значение выражения

$\log_{12} 6 + \log_{12} 2$. Так как мы видим, что в логарифме одинаковые основания будем использовать формулу суммы $\log_{12} 6 + \log_{12} 2 = \log_{12}(6 \cdot 2) = \log_{12} 12 = 1$.

Ответ: 1.

4. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c, \quad a \neq 1; \quad a > 0; \quad b > 0; \quad c > 0.$

Пример: Найти значение выражения $\log_2 48 - \log_2 3$.

В этом примере мы видим одинаковые основания 2, поэтому используем формулу разности логарифмов

$$\log_2 48 - \log_2 3 = \log_2 \frac{48}{3} = \log_2 16 = 4.$$

Ответ: 4.

5. $\log_a b^p = p \log_a b, \quad a \neq 1; \quad a > 0; \quad b > 0.$

Пример: Найти значение выражения $\log_3 81$.

Представим число логарифма через основание 3, в виде $81 = 3^4$. Применим пятую формулу, получаем: $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4 \log_3 3 = 4 \cdot 1 = 4$

Ответ: 4.

$$6. \log_{a^q} b = \frac{1}{q} \log_a b, \quad a \neq 1; \quad a > 0; \quad b > 0; \quad q \neq 0.$$

Пример: Найти значение выражения $\log_{125} 5$.

Мы видим, что из основания можно сделать число 5: $125 = 5^3$. Используя формулу, получаем: $\log_{125} 5 = \log_{5^3} 5 = \frac{1}{3} \log_5 5 = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

$$7. \log_{a^q} b^p = \frac{p}{q} \cdot \log_a b, \quad a \neq 1; \quad a > 0; \quad b > 0; \quad q \neq 0.$$

Пример: Найти значение выражения $\log_{64} 128$.

Используя свойства степеней, представим $64 = 2^6$ и $128 = 2^7$. Тогда по седьмой формуле получаем: $\log_{64} 128 = \log_{2^6} 2^7 = \frac{7}{6} \cdot \log_2 2 = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$.

Ответ: $1\frac{1}{6}$.

$$8. \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \quad a \neq 1; \quad c \neq 1; \quad a > 0; \quad b > 0; \quad c > 0.$$

Пример: Представить $\log_2 9$ в виде логарифма с основанием 3.

Воспользуемся формулой, получим: $\log_2 9 = \frac{\log_3 9}{\log_3 2} = \frac{\log_3 3^2}{\log_3 2} = \frac{2 \log_3 3}{\log_3 2} = \frac{2}{\log_3 2}$.

Ответ: $\log_2 9 = \frac{2}{\log_3 2}$

$$9. \log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \quad a \neq 1; \quad b \neq 1; \quad a > 0; \quad b > 0.$$

Пример: Найти значение выражения $\log_5 16 \cdot \log_2 25$.

Поработаем с каждым логарифмом по отдельности:

$$\log_5 16 = \log_5 2^4 = 4 \log_5 2$$

$$\log_2 25 = \log_2 5^2 = 2 \log_2 5$$

Тогда, «перевернув» второй логарифм, получаем:

$$\log_5 16 \cdot \log_2 25 = 4 \log_5 2 \cdot 2 \log_2 5 = 8 \cdot \log_5 2 \cdot \frac{1}{\log_5 2} = 8 \cdot 1 = 8.$$

Ответ: 8.

Рассмотрим другие примеры.

Пример 1. Вычислите:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \log_2 5 + \log_4 \frac{8}{25} = \log_2 5 + \log_{2^2} \frac{8}{25} = \log_2 5 + \frac{1}{2} \log_2 \frac{8}{25} = \log_2 5 + \log_2 \sqrt{\frac{8}{25}} = \\ & \log_2 5 + \log_2 \sqrt{8} - \log_2 \sqrt{25} = \log_2 5 + \log_2 8^{\frac{1}{2}} - \log_2 5 = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \log_2 2 = \frac{3}{2} \\ \text{b)} \quad & \log_3 4 - \log_{\sqrt{3}} \frac{2}{3} = \log_3 4 - \log_{3^{\frac{1}{2}}} \frac{2}{3} = \log_3 4 - 2 \log_3 \frac{2}{3} = \log_3 4 - \log_3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \\ & \log_3 4 - \log_3 \frac{4}{9} = \log_3 \left(4 \div \frac{4}{9}\right) = \log_3 \left(4 \cdot \frac{9}{4}\right) = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2 \log_3 3 = 2 \end{aligned}$$

Пример 2. Вычислите:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & 16^{\log_4 8-1} = 4^{2(\log_4 8-1)} = 4^{2\log_4 8-2} = \frac{4^{\log_4 64}}{4^2} = \frac{64}{16} = 4 \\ \text{b)} \quad & 27^{\log_3 5+1} = 3^{3(\log_3 5+1)} = 3^{3\log_3 5+3} = 3^{\log_3 5^3} \cdot 3^3 = 5^3 \cdot 3^3 = 125 \cdot 27 = 3375 \\ \text{c)} \quad & \frac{1}{25} \cdot 9^{\log_3 \sqrt{14}+0,5} = \frac{1}{25} \cdot 3^{2(\log_3 \sqrt{14}+0,5)} = \frac{1}{25} \cdot 3^{2\log_3 \sqrt{14}+1} = \frac{1}{25} \cdot 3^{\log_3 14} \cdot 3^1 \\ & = \frac{1}{25} \cdot 14 \cdot 3 = \frac{42}{25} = 1 \frac{17}{25} \\ \text{d)} \quad & 25^{0,25\log_5 9} - 121^{0,5\log_{11} 21} = 5^{2 \cdot 0,25\log_5 3^2} - 11^{2 \cdot 0,5\log_{11} 21} = 5^{2 \cdot 0,5 \cdot 2\log_5 3} - 11^{\log_{11} 21} = \\ & 5^{\log_5 3} - 21 = 3 - 21 = -18 \end{aligned}$$

Пример 3. Найти значение выражения $\log_a \sqrt{ab}$, если $\log_a b = 7$.

Применяя свойства степени и суммы логарифмов, получим:

$$\begin{aligned} \log_a \sqrt{ab} &= \log_a (ab)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_a (ab) = \frac{1}{2} \cdot (\log_a a + \log_a b) = \\ & \frac{1}{2} (1 + \log_a b) = \frac{1}{2} \cdot (1 + 7) = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4 \end{aligned}$$

Ответ: 4.

Пример 3. Найти значение выражения $\log_a^2 b + \log_a b^2 + 1$, если $\log_{ab} a = 0,2$.

Представим $\log_{ab} a = \frac{1}{5}$, воспользуемся девятым свойством, получим $\frac{1}{\log_a ab} = \frac{1}{5}$,

воспользуемся свойством пропорции: $\log_a ab = 5$. Теперь используя свойство суммы логарифмов получаем $\log_a a + \log_a b = 5 \Leftrightarrow 1 + \log_a b = 5 \Leftrightarrow \log_a b = 5 - 1 \Leftrightarrow \log_a b = 4$.

Тогда, $\log_a^2 b + \log_a b^2 + 1 = \log_a^2 b + 2 \log_a b + 1 = 4^2 + 2 \cdot 4 + 1 = 25$.

Ответ: $\log_a^2 b + \log_a b^2 + 1 = 25$.

Набор заданий:

1. Вычислите:

- | | | |
|-------------------------|--|--|
| 1) $\lg 8 + \lg 125$; | 6) $\lg 5 - \lg 0,5$; | 11) $\log_2 11 - \log_2 44$; |
| 2) $\lg 25 + \lg 4$; | 7) $\log_2 7 - \log_2 \frac{7}{16}$; | 12) $\log_5 5 + \log_5 \frac{1}{7}$; |
| 3) $\lg 400 - \lg 4$; | 8) $\log_4 32 + \log_4 2$; | 13) $\log_2 7 - \log_2 \frac{7}{32}$; |
| 4) $\lg 80 - \lg 8$; | 9) $\log_3 8 - \log_3 \frac{8}{9}$; | 14) $\log_3 2 - \log_3 54$; |
| 5) $\lg 13 - \lg 130$; | 10) $\log_5 7 - \log_5 \frac{7}{25}$; | 15) $\lg 17 - \lg 170$. |

2. Вычислите: $25^{\log_5 3}$; $25^{-\log_5 10}$; $2^{2+\log_2 5}$; $2^{2+\log_2 5}$; $5^{\log_5 10-2}$; $2,5^{\log_{2,5} 10+1}$; $8^{2\log_8 5} - 1$;
 $5 \cdot 3^{\log_3 2}$.

3. Найдите значение выражения:

- | | | |
|--|---|---|
| 1) $5^{1+\log_5 3}$; | 6) $6^{-2\log_6 5}$; | 11) $5^{\log_5 10-2}$; |
| 2) $10^{1-\lg 2}$; | 7) $9^{-3\log_9 2}$; | 12) $3^{2+\log_3 10}$; |
| 3) $\left(\frac{1}{7}\right)^{1+\log_7 2}$; | 8) $\left(\frac{1}{2}\right)^{5\log_{\frac{1}{2}} 2}$; | 13) $5 \cdot 3^{\log_3 2}$; |
| 4) $3^{2-\log_3 18}$; | 9) $7^{2-\log_7 1}$; | 14) $2,5^{\log_{2,5} 10+1}$; |
| 5) $4^{2\log_4 3}$; | 10) $2^{3+\log_2 \frac{1}{5}}$; | 15) $\frac{1}{8} \cdot 8^{2\log_8 5}$. |

4. Вычислите:

- a) $2\log_5 25 + 3\log_2 64$
 $2\log_2 \frac{1}{4} - 3\log_{\frac{1}{3}} 27$
b) $\log_2 \log_2 16$
c) $\log_3 \log_3 \log_3 27$

5. Найдите значения выражений: $\frac{\lg 9}{\lg 3}$; $\frac{\lg 5}{\lg 25}$; $\frac{\lg 15 - \lg 3}{\lg 25}$; $\frac{\log_3 8}{\log_3 4}$; $\frac{\log_4 64}{\log_2 4}$; $\frac{\log_4 81}{\log_4 3}$;
 $\frac{\log_2 0,125}{\log_2 256}$.

6. Найдите значения выражений

$$1) \frac{\log_3 16}{\log_3 4};$$

$$2) \frac{\log_2 25}{\log_2 5};$$

$$3) \frac{\lg 4}{\lg 2};$$

$$4) \frac{\log_3 64}{\log_3 4};$$

$$5) \log_3(\log_2 8);$$

$$6) \frac{\log_7 1000}{\log_7 10};$$

$$7) \frac{\log_5 100}{\log_5 10};$$

$$8) \log_3(\log_3 27);$$

$$9) \log_{\frac{1}{2}}(\log_3 \sqrt{3});$$

$$10) \lg(\lg_2 10^{10});$$

$$11) \lg(5 \lg 100)^2;$$

$$12) \log_3(3 \log_2 8);$$

$$13) \log_3(3 \log_3 27);$$

$$14) \log_6(3 \log_2 4);$$

$$15) \log_3 \log_3 \log_3 27.$$

Дифференцированный набор заданий для систематизации знаний «Свойства логарифма»

Вариант – 1	Вариант – 2	Вариант – 3	Вариант – 4
<p>1. Вычислить $\log_3 81$ а) 27; б) 9; в) 4; г) -4</p> <p>2. Вычислить $\log_{169} 13$ а) $\frac{1}{13}$; б) $\frac{1}{2}$; в) 1; г) 13</p> <p>3. Вычислить $\log_4 \log_3 9$ а) 2; б) 0,5; в) $\sqrt{2}$; г) 4</p> <p>4. Вычислить $\frac{\lg 125}{\lg 5}$ а) 75; б) 35; в) $\lg 25$; г) 3</p> <p>5. Вычислить $\log_6 12 - \log_6 3 + \log_6 9$ а) 6; б) 2; в) -2; г) -6</p> <p>6. Вычислить $2 \log_2 6 + \log_2 \frac{35}{9} - \log_2 35$ а) 35; б) 4; в) 2; г) -35</p> <p>7. Вычислить $\log_3 2 - \log_3 2 \cdot \log_2 6 + \log_3 6$ а) $\log_3 2$; б) 1; в) -1; г) $\log_2 3$</p> <p>8. Вычислить $\log_9 17 \cdot \log_{17} 7 \cdot \log_{49} 9$ а) 0,5; б) 2; в) 1; г) $\sqrt{2}$</p>	<p>1. Вычислить $\log_5 125$ а) 25; б) -3; в) 4; г) 3</p> <p>2. Вычислить $\log_{25} 5$ а) $\frac{1}{5}$; б) 1; в) $\frac{1}{2}$; г) 5</p> <p>3. Вычислить $\log_3 \log_4 64$ а) 3; б) 0; в) 1; г) 4</p> <p>4. Вычислить $\frac{\lg 256}{\lg 4}$ а) 4; б) 64; в) $\lg 64$; г) 16; .</p> <p>5. Вычислить $\log_3 6 + \log_3 4 + \log_3 \frac{9}{24}$ а) 10; б) 8; в) 2; г) 4</p> <p>6. Вычислить $2 \log_6 27 - \log_6 81 - 2 \log_6 18$ а) 6; б) 2; в) -6; г) -2</p> <p>7. Вычислить $2 \log_2 8 + \log_2 \frac{25}{16} - \log_2 25$ а) 25; б) 2; в) 4; г) -25</p> <p>8. Вычислить $\log_3 5 \cdot \log_4 9 \cdot \log_5 2$ а) 2; б) 1; в) 0,5; г) $\sqrt{2}$</p> <p>9. Определить $\log_5 30$, если $\log_5 2 = a, \log_5 3 = b$ а) $3a + 2b$; б) $1 + a + b$; в) $a + b$; г) $a - b$</p>	<p>1. Вычислить $\log_4 \frac{1}{16}$ а) -2; б) 2; в) 4; г) -4</p> <p>2. Вычислить $\log_{81} 9$ а) $\frac{1}{9}$; б) 1; в) 9; г) $\frac{1}{2}$</p> <p>3. Вычислить $\log_2 \log_4 256$ а) 3; б) 0; в) 1; г) 2</p> <p>4. Вычислить $\frac{\lg 32}{\lg 2}$ а) 16; б) 5; в) $\lg 16$; г) 30; .</p> <p>5. Вычислить $\log_4 5 + \log_4 25 + \log_4 \frac{2}{125}$ а) 10; б) 4; в) 8; г) 0,5</p> <p>6. Вычислить $\log_2 10 - \log_2 5 + \log_2 8$ а) 4; б) 3; в) 5; г) 10;</p> <p>7. Вычислить $2 \log_7 32 - \log_7 256 - 2 \log_7 14$ а) 7; б) 2; в) -2; г) -7</p> <p>8. Вычислить $\log_3 7 \cdot \log_4 81 \cdot \log_7 2$ а) 1; б) 0,5; в) 2; г) $\sqrt{2}$</p>	<p>1. Вычислить $\log_5 \frac{1}{25}$ а) 2; б) -2; в) 5; г) -5</p> <p>2. Вычислить $\log_{121} 11$ а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{11}$; в) 11; г) 2</p> <p>3. Вычислить $\log_5 \log_{32} 2$ а) 1; б) 0; в) -1; г) 5</p> <p>4. Вычислить $\frac{\lg 27}{\lg 3}$ а) 9; б) $\lg 9$; в) 3; г) 24; .</p> <p>5. Вычислить $\log_5 10 + \log_5 50 - \log_5 4$ а) 3; б) 4; в) 10; г) 0,5</p> <p>6. Вычислить $\log_2 8 - \log_2 3 + \log_2 12$ а) 3; б) 5; в) 4; г) 17</p> <p>7. Вычислить $3 \log_2 4 + \log_2 \frac{15}{16} - \log_2 15$ а) 15; б) 4; в) -15; г) 2</p> <p>8. Вычислить $\log_5 7 \cdot \log_{121} 25 \cdot \log_7 11$ а) $\sqrt{2}$; б) 2; в) 0,5; г) 1</p>

<p>9. Определить $\log_5 72$, если $\log_5 2 = a, \log_5 3 = b$ а) $3a + 2b$; б) $2a + 3b$; в) $a - b$; г) $a + b$</p> <p>10. Вычислить $\lg 7(\log_7 15 + \log_7 4 - \log_7 6)$ а) 2; б) 0,5; в) 1; г) -1</p>	<p>10. Вычислить $\lg 3(\log_3 25 - \log_3 2 + \log_3 8)$ а) -2; б) -1; в) 1 г) 2</p>	<p>9. Определить $\log_5 24$, если $\log_5 2 = a, \log_5 3 = b$ а) $2a + 3b$; б) $2(a + b)$; в) $3a + b$; г) $a + b$</p> <p>10. Вычислить $\lg 2(\log_2 75 - \log_2 15 + \log_2 20)$ а) 2; б) 1; в) -2 г) -1</p>	<p>9. Определить $\log_5 60$, если $\log_5 2 = a, \log_5 3 = b$ а) $2a + b$; б) $1 + a + b$; в) $3a + b$; г) $1 + 2a + b$</p> <p>10. Вычислить $\lg 4(\log_4 35 + \log_4 2 - \log_4 7)$ а) -1; б) 1; в) 2 г) -2</p>
--	---	--	---

Свойства логарифмов Вариант – 5	Свойства логарифмов Вариант – 6	Свойства логарифмов Вариант – 7	Свойства логарифмов Вариант – 8
<p>1. Вычислить $\log_9 81$ а) 4; б) 9; в) 2; г) -2</p> <p>2. Вычислить $\log_{144} 12$ а) $\frac{1}{12}$, в) $\frac{1}{2}$; г) 1; д) 12</p> <p>3. Вычислить $\log_2 \log_9 3$ а) 2; б) -1; в) $\sqrt{2}$; г) 0,5</p> <p>4. Вычислить $\lg 2$ а) 5; б) 32; в) $\lg 32$; г) 6</p> <p>5. Вычислить $\log_3 8 - \log_3 2 + \log_3 \frac{9}{4}$ а) 6; б) 2; в) -2; г) -6</p> <p>6. Вычислить $2 \log_2 6 + \log_2 \frac{24}{9} - \log_2 24$ а) 24; б) 4; в) 2; г) -24</p> <p>7. Вычислить</p>	<p>1. Вычислить $\log_5 625$ а) 125; б) 3; в) -3; г) 4</p> <p>2. Вычислить $\log_{25} 5$ а) $\frac{1}{5}$, в) 1 г) $\frac{1}{2}$; д) 5</p> <p>3. Вычислить $\log_9 \log_4 64$ а) 1; б) 3; в) 0,5; г) 4</p> <p>4. Вычислить $\lg 3$ а) 4; б) 78; в) 27; г) $\lg 27$;</p> <p>5. Вычислить $\log_3 4 - \log_3 16 + \log_3 \frac{4}{9}$ а) 9; б) 0,5; в) -2; г) 2;</p> <p>6. Вычислить $2 \log_7 27 - \log_7 81 - 2 \log_7 21$ а) 7; б) 2; в) -7; г) -2</p>	<p>1. Вычислить $\log_4 64$ а) 3; б) 32 в) 4; г) 16</p> <p>2. Вычислить $\log_{64} 8$ а) $\frac{1}{8}$, в) 8 г) 1; д) $\frac{1}{2}$</p> <p>3. Вычислить $\log_4 \log_2 16$ а) 3; б) 0; в) 2; г) 1</p> <p>4. Вычислить $\lg 16$ а) 16; б) 2; в) $\lg 16$; г) 4.</p> <p>5. Вычислить $\log_4 3 + \log_4 25 + \log_4 \frac{16}{75}$ а) 16; б) 4; в) 8; г) 2</p> <p>6. Вычислить $2 \log_4 6 + \log_4 \frac{5}{9} - \log_4 5$ а) 1; б) 4; в) 2; г) 9;</p> <p>7. Вычислить</p>	<p>1. Вычислить $\log_3 \frac{1}{27}$ а) 3; б) -3; в) 9; г) -9</p> <p>2. Вычислить $\log_{125} 5$ а) $\frac{1}{3}$, в) $\frac{1}{25}$ г) 3; д) 25</p> <p>3. Вычислить $\log_5 \log_{243} 3$ а) -1; б) 3 в) 1; г) 5</p> <p>4. Вычислить $\lg 9$ а) 9; б) $\lg 9$; в) 2; г) 27;</p> <p>5. Вычислить $\log_3 15 + \log_3 \frac{4}{5} - \log_3 4$ а) 1; б) 4; в) 3; г) 0,5</p> <p>6. Вычислить $2 \log_4 8 - \log_4 3 + \log_4 12$ а) 3; б) 4; в) 5; г) 17</p>

$\log_6 2 - \log_6 2 \cdot \log_2 6 + \log_6 18$ $\bar{a}) 1; \quad) \log_6 2; \quad \bar{b}) -1; \quad) \log_2 6;$ 8. Вычислить $\log_3 15 \cdot \log_{15} 7 \cdot \log_{49} 81$ $\bar{a}) 2; \quad \bar{b}) \frac{1}{2}; \quad \bar{c}) 1; \quad) \sqrt{2}$ 9. Определить $\log_5 36$, если $\log_5 2 = a, \log_5 3 = b$ а) $2a + 2b$; б) $3a + 2b$; в) $a - b$; г) $a + b$ 10. Вычислить $\lg 9(\log_9 15 + \log_9 4 - \log_9 6)$ а) 2; б) 0,5; в) 1; г) -1	7. Вычислить $2 \log_2 8 + \log_2 \frac{15}{4} - \log_2 15$ а) 15; б) 4; в) -15; г) 2 8. Вычислить $\log_3 7 \cdot \log_4 81 \cdot \log_7 2$ а) $\sqrt{2}$; б) 2; в) 0,5; г) 1 9. Определить $\log_5 90$, если известно, что $\log_5 2 = a, \log_5 3 = b$ а) $3a + 2b$; б) $1 + a + 2b$; в) $1 + a + b$; г) $a - b$ 10. Вычислить $\lg 3(\log_3 25 + \log_3 2 - \log_3 5)$ а) -2; б) -1; в) 2 г) 1	$2 \log_9 16 - \log_9 64 - 2 \log_9 18$ а) 7; б) 2; в) -2; г) -7 8. Вычислить $\log_4 7 \cdot \log_9 16 \cdot \log_7 3$ а) 0,5; б) 2; в) 1; г) $\sqrt{2}$ 9. Определить $\log_3 60$, если известно, что $\log_3 2 = a, \log_3 5 = b$ а) $2a + 2b$; б) $2(a + b)$; в) $1 + 2a + b$; г) $1 + a + 2b$ 10. Вычислить $\lg 2(\log_2 75 - \log_2 15 + \log_2 20)$ а) 2; б) 1; в) -2 г) -1	7. Вычислить $3 \log_2 4 + \log_2 \frac{5}{8} - \log_2 10$ а) 15; б) 4; в) 8; г) 2 8. Вычислить $\log_5 9 \cdot \log_{11} 125 \cdot \log_9 11$ а) 1; б) $\sqrt{2}$; в) 0,5; г) 3 9. Определить $\log_3 90$, если известно, что $\log_3 2 = a, \log_3 5 = b$ а) $2a + b$; б) $1 + a + b$; в) $3a + b$; г) $2 + a + b$ 10. Вычислить $\lg 5(\log_5 35 + \log_5 2 - \log_5 7)$ а) -1; б) 1; в) 2; г) -2
--	--	---	--

Свойства логарифмов Вариант - 9	Свойства логарифмов Вариант - 10	Свойства логарифмов Вариант - 11	Свойства логарифмов Вариант - 12
$\log_{\frac{1}{3}} 81$ 1. Вычислить а) 27; б) 9; в) -4; г) 4 2. Вычислить $\log_{27} 3$ $\bar{a}) 0,5; \quad \bar{b}) \frac{1}{3}; \quad \bar{c}) 1; \quad) 3$ 3. Вычислить $\log_4 \log_3 81$ а) 2; б) 1; в) $\sqrt{2}$; г) 4 4. Вычислить $\frac{\lg 64}{\lg 4}$	$\log_{13} 169$ 1. Вычислить а) 13; б) 0,5; в) 4; г) 2 2. Вычислить $\log_{25} 5$ $\bar{a}) \frac{1}{5}; \quad \bar{b}) 1; \quad \bar{c}) \frac{1}{2}; \quad) 5$ 3. Вычислить $\log_3 \log_5 125$ а) 3; б) 0; в) 1; г) 4 4. Вычислить $\frac{\lg 16}{\lg 2}$	$\log_2 \frac{1}{16}$ 1. Вычислить а) -4; б) -8; в) 4; г) 8 2. Вычислить $\log_{64} 4$ $\bar{a}) \frac{1}{16}; \quad \bar{b}) 16; \quad \bar{c}) 3; \quad) \frac{1}{3}$ 3. Вычислить $\log_2 \log_{81} 3$ а) 4; б) 1; в) 2; г) -2	$\log_{25} 5$ 1. Вычислить а) 2; б) 0,5; в) -2; г) 5 2. Вычислить $\log_{121} 11$ $\bar{a}) \frac{1}{2}; \quad \bar{b}) \frac{1}{11}; \quad \bar{c}) 11; \quad) 2$ 3. Вычислить $\log_5 \log_2 32$ а) 1; б) -5; в) -1; г) 5 4. Вычислить $\frac{\lg 3}{\lg 27}$

<p>a) 16; б) 60; в) lg16; г) 3 5. Вычислить $\log_4 12 + \log_4 3 - \log_4 9$ a) 6; б) 1; в) 2; г) $\log_4 6$ 6. Вычислить $2 \log_2 6 + \log_2 \frac{13}{9} - \log_2 13$ a) 13; б) 4; в) 2; г) -13 7. Вычислить $\log_3 5 - \log_3 5 \cdot \log_5 10 + \log_3 18$ а) 2; б) $\log_3 5$; в) 1; г) $\log_5 3$ 8. Вычислить $\log_8 15 \cdot \log_{15} 7 \cdot \log_7 64$ а) 2; б) 0,5; в) 1; г) $\sqrt{2}$ 9. Определить $\log_6 72$, если $\log_6 2 = a, \log_6 3 = b$ а) $3a + 2b$; б) $2a + 3b$; в) $a - b$; г) $a + b$ 10. Вычислить $\lg 2(\log_2 20 + \log_2 3 - \log_2 6)$ а) 2; б) 0,5; в) 1; г) -1</p>	<p>а) 4; б) 8; в) lg8; г) 12 5. Вычислить $\log_3 5 + \log_3 6 + \log_3 \frac{9}{30}$ а) 10; б) 8; в) 2; г) 4 6. Вычислить $2 \log_5 27 - \log_5 81 - 2 \log_5 15$ а) 5; б) 2; в) -5; г) -2 7. Вычислить $2 \log_3 8 + \log_3 \frac{27}{16} - \log_3 4$ а) 8; б) 3; в) 4; г) 16 1. $\log_7 5 \cdot \log_4 49 \cdot \log_5 2$ а) 2; б) 1; в) 0,5; г) $\sqrt{2}$ 9. Определить $\log_3 30$, если известно, что $\log_3 2 = a, \log_3 5 = b$ а) $3a + 2b$; б) $1 + a + b$; в) $a + b$; г) $a - b$ 10. Вычислить $\lg 9(\log_9 25 - \log_9 2 + \log_9 8)$ а) -2; б) 1; в) 0,5 г) 2</p>	<p>$\frac{\lg 225}{\lg 15}$ 4. Вычислить а) 15; б) 2; в) lg15; г) lg210 5. Вычислить $\log_4 5 + \log_4 15 + \log_4 \frac{16}{75}$ а) 0,5; б) 4; в) 8; г) 2 6. Вычислить $2 \log_3 6 - \log_3 8 + \log_3 18$ а) 4; б) 3; в) 5; г) 16 7. Вычислить $2 \log_5 32 - \log_5 256 - 2 \log_5 10$ а) 10; б) 2; в) -2; г) 5 8. Вычислить $\log_4 7 \cdot \log_9 16 \cdot \log_7 3$ а) 0,5; б) 2; в) 1; г) $\sqrt{2}$ 9. Определить $\log_7 70$, если известно, что $\log_7 2 = a, \log_7 5 = b$ а) $1 + a + 2b$; б) $1 + 2a + b$; в) $1 + a + b$; г) $a + b$ 10. Вычислить $\lg 8(\log_8 30 - \log_8 6 + \log_8 20)$ а) 2; б) 1; в) -2 г) -1</p>	<p>$\frac{1}{9}$; б) 3; в) $\frac{1}{3}$; г) -24; 5. Вычислить $\log_5 100 + \log_5 5 - \log_5 4$ а) 3; б) 4; в) 5; г) 0,5 6. Вычислить $\log_4 8 - \log_4 3 + \log_4 24$ а) 4; б) 3; в) 5; г) 29 7. Вычислить $3 \log_2 3 + \log_2 \frac{8}{3} - \log_2 9$ а) 9; б) 4; в) 2; г) 3 8. Вычислить $\log_5 3 \cdot \log_{11} 25 \cdot \log_3 11$ а) 1; б) $\sqrt{2}$; в) 0,5; г) 2 9. Определить $\log_2 60$, если $\log_2 3 = a, \log_2 5 = b$ а) $1 + 2a + b$; б) $1 + a + b$; в) $3a + b$; г) $2 + a + b$ 10. Вычислить $\lg 9(\log_9 35 + \log_9 2 - \log_9 7)$ а) -1; б) 1; в) 2 г) -2</p>
--	--	---	--

Логарифмическая функция

Функция вида $y = \log_a x$, где $x > 0, a \neq 1, a > 0$, называется логарифмической.

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ является обратной для показательной функции $y = a^x$, поэтому график логарифмической функции можно получить из графика показательной отражением относительно $y = x$

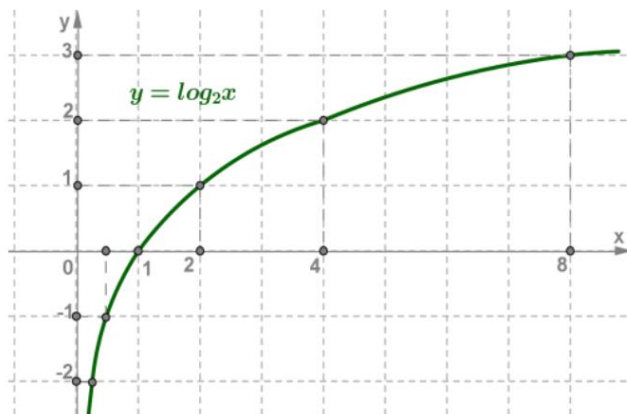
Свойства логарифмической функции:

1. Область определения функции $x \in (0; +\infty)$;
2. Область значения функции $y \in (-\infty; +\infty)$;
3. Если $a > 1$, то функция возрастает на всей области определения; если $0 < a < 1$, то функция убывает на всей области определения.
4. Логарифмическая функция не является четной, ни нечетной; не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений; не ограничена снизу; график любой логарифмической функции $y = \log_a x$ проходит через точку $(0; 1)$.

Построим графики функций:

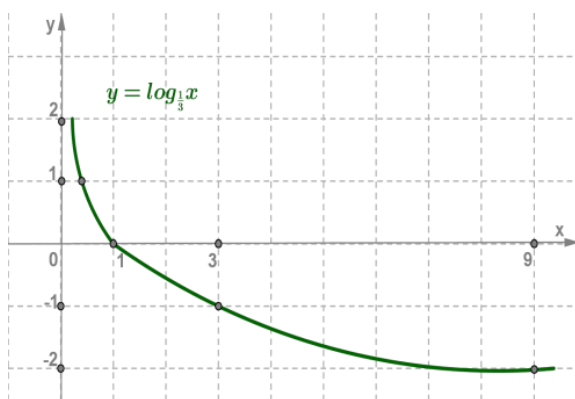
а) $y = \log_2 x$, где основание $2 > 1$, значит функция возрастающая.

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	2	4	8
y	-1	-2	0	1	2	3



б) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, где основание $0 < \frac{1}{3} < 1$, значит функция убывающая.

x	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	1	3	9
y	1	2	0	-1	-2



Методы решения логарифмических уравнений и неравенств

Рассмотрим методы решения логарифмических уравнений и неравенств.

1. Применение определения логарифма

Поскольку операция возведения в степень определена только при положительном основании степени, то логарифмы определены только при положительном основании. Кроме того, из того, что любая степень единицы $= 1$, следует, что основание логарифма должно быть отличным от единицы. Любая степень положительного числа есть положительное число, поэтому логарифмы определены только для положительных чисел.

Следовательно, функция $y = \log_a x$ определена при $x > 0$ и $a > 0$, а также $a \neq 1$. Данное обстоятельство необходимо учитывать при решении уравнений, содержащих логарифмы, при этом начинать следует с определения области допустимых значений (далее – ОДЗ), учитывая, что все выражения, от которых берутся логарифмы, должны быть положительны.

Отметим, что $\log_a a = 1$ из определения логарифма следует, что для любого a , при котором определен логарифм, а также следует помнить основные свойства логарифмов.

2. Метод потенцирования

Потенцирование, то есть переход от уравнения $\log_{f(x)} \varphi(x) = \log_{f(x)} \omega(x)$, к уравнению $\varphi(x) = \omega(x)$. Однако следует иметь в виду, что эти уравнения могут быть неравносильны, например, второе уравнение может иметь корни не входящие в ОДЗ первого уравнения, а также для них может быть характерно $f(x) \leq 0$, $f(x) = 1$ или $\varphi(x) = \omega(x) \leq 0$.

Следовательно, потенцирование может привести к появлению посторонних корней.

3. Метод введения новой переменной

Распространенным методом решения уравнений вообще, и логарифмических в частности, служит замена переменных (метод подстановки). Чаще всего этот метод используется, когда уравнение является квадратным относительно функции, содержащей искомую переменную. Данный метод позволяет значительно упростить или ускорить получение решения уравнений, содержащих кроме логарифмической другие комбинации функций. Следует отметить, что указанный метод также используется при решении неравенств, в том числе и логарифмических.

Разберем примеры решения логарифмических уравнений и неравенств с использованием указанных методов.

1. Логарифмические уравнения

Пример 1.1 Решить уравнение: $2 \log_{0,2} x = \log_{0,2}(5x^2 - x)$

Решение: ОДЗ: $\begin{cases} x > 0 \\ 5x^2 - x > 0 \end{cases}$

Проведем преобразование в левой части уравнения согласно свойству логарифмов: $\log_a x^n = n \log_a x$, получим: $\log_{0,2} x^2 = \log_{0,2}(5x^2 - x)$. Так как основания равны, то и степени тоже равны, поэтому основания можно опустить, получим: $x^2 = 5x^2 - x$.

Перенесем значения из правой части в левую изменив знак на противоположный, получим: $4x^2 - x = 0$. Решив уравнение получим корни: $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{1}{4}$. Сделаем проверку. Заметим, что $x = 0$ не удовлетворяет ОДЗ.

Ответ: $x = \frac{1}{4}$

Пример 1.2 Решить уравнение: $\log_3 x + \log_x 3 = \frac{5}{2}$

Решение: ОДЗ: $x > 0; x \neq 1$

Введем новую переменную, заменив $\log_3 x$ на t , одновременно перейдем к новому основанию, воспользовавшись свойством логарифма $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$, $b \neq 1$ или $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$ (можно менять местами основание и аргумент, но выражение «переворачивается»), получим уравнение: $t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$.

Перенесем значения из правой части в левую изменив знак на противоположный и приведем к одному основанию, получим: $\frac{2t^2 - 5t + 2}{2t} = 0$. Заметим, что числитель = 0, а знаменатель $\neq 0$.

Решим квадратное уравнение $2t^2 - 5t + 2 = 0$, получим корни: $t_1 = 2$ и $t_2 = \frac{1}{2}$.

Сделаем проверку, и убедившись, что корни подходят, подставим их в выражение $\log_3 x = t$, получим:

- если $t = 2$, то $\log_3 x = 2$, а $x_1 = 9$;

- если $t = \frac{1}{2}$, то $\log_3 x = \frac{1}{2}$, а $x_2 = \sqrt{3}$.

Ответ: $x_1 = 9, x_2 = \sqrt{3}$

Пример 1.3 Решить уравнение:

$$\lg 5 + \lg(x + 10) = 1 - \lg(2x - 1) + \lg(21x - 20)$$

Р

е Заменяем 1 на $\lg 10$, используем формулы суммы и разности логарифмов: $\log_a xy =$

$\log_a x + \log_a y$ и $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$, получим уравнение: $\lg 5(x + 10) = \lg \frac{10(21x - 20)}{2x - 1}$.

е

Применим метод потенцирование и сокращение на 5, получим уравнение: $x + 10 =$
 $\frac{2(21x - 20)}{2x - 1}$. Приведем к общему знаменателю и к подобным членам, получим уравнение: $2x^2 -$

$23x + 30 = 0$. Решим квадратное уравнение, получим корни: $x_1 = 10$ и $x_2 = \frac{3}{2}$. Сделаем

проверку, и убедившись, что корни подходят. Заметим, что оба корня входят в ОДЗ.

Ответ: $x_1 = 10, x_2 = \frac{3}{2}$

О

Пример 1.4 Решить уравнение: $5^{\lg_5 x} * \lg 4 = \lg(2 * 9^x - 6^x)$

Д

Решение: ОДЗ: $x > 0$;

З

Применив основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b} = b$, и формулу $n \log_c a = \log_c a^n$, получим $\lg 4^x = \lg(2 * 9^x - 6^x)$. Применим потенцирование и приведем к однородному показательному уравнению: $4^x = 2 * 9^x - 6^x$
 $x+10>0 \quad 2x-1>0 \quad 21x-20>0 \Leftrightarrow x>-10 \quad x>12 \quad x>2021$

Разделим обе части уравнения на 9^x и обозначим $\left(\frac{2}{3}\right)^x = y > 0$. Полученное квадратное уравнение $y^2 + y - 2 = 0$ имеет корни $y_1 = 1$ и $y_2 = -2$. Второй корень посторонний, поэтому $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$, а $x = 0$ – решение однородного показательного уравнения.

Заметим, что $x = 0$ не входит в ОДЗ, следовательно, уравнение не имеет решений.

Ответ: уравнение не имеет решений

Примеры логарифмических уравнений для самостоятельного решения:

1) $\log_5(3x - 2) = \log_5 7$

- 2) $\log_2(x+1) + \log_2(x+3) = 3$
- 3) $\log_2(1-x) = 3 - \log_2(3-x)$
- 4) $\log_7(3x+4) = \log_7(5x+8)$
- 5) $\lg(2x^2 - 4x + 12) = \lg x + \lg(x+3)$
- 6) $\lg(x + \sqrt{3}) + \lg(x - \sqrt{3}) = 0$
- 7) $\log_4(2x-1) \log_4 x = 2\log_4(2x-1)$
- 8) $\log_2 x = 4$
- 9) $\lg x + 2 = 0$
- 10) $\log_x(2-x) = 2$
- 11) $\log_5(2x+1) = 2\log_5 x$
- 12) $\log_5 x - \log_5(6-x^2) = 0$
- 13) $\log_4 \log_2 x = 0.5$
- 14) $\log_5(x-1) + \log_5(x-2) = \log_5(x+2)$
- 15) $\lg(x^2 + 100x) - \lg(x+4) = 2$
- 16) $\lg x = 2 - \lg 5$
- 17) $\log_3(x-8) = 2 - \log_3 x$
- 18) $\log_{x-1}(x^2 - 7x + 41) = 2$
- 19) $\log_5(x+4) - \log_5(1-2x) = -\log_5(2x+3)$
- 20) $\lg \sqrt{5x-4} + \lg \sqrt{x+1} = 2 + \lg 18$
- 21) $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = \frac{11}{12}$
- 22) $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6$
- 23) $2 \cdot \log_{16}^2 x - \log_{16} x = 0$
- 24) $\lg^2 x = 3 - 2 \lg x$
- 25) $\log_2^2 x^3 - 20 \cdot \log_2 \sqrt{x} + 1 = 0$
- 26) $\frac{1}{5-\lg x} + \frac{2}{1+\lg x} = 1$
- 27) $\sqrt{1 + \log_2 x} + \sqrt{4 \cdot \log_4 x - 2} = 4$
- 28) $\log_5(x-2) + \log_{\sqrt{5}}(x^3 - 2) + \log_{0.2}(x-2) = 4$
- 29) $3 \log_x 16 - 4 \log_{16} x = 2 \log_2 x$
- 30) $\log_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3$
- 31) $\log_{3x} \frac{3}{x} + \log_3^2 x = 1$
- 32) $\log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x = \frac{2}{3}$
- 33) $2 \cdot \log_5 x + 2 \cdot \log_x 5 = 5$

$$34) \frac{1}{4-\lg x} + \frac{2}{2+\lg x} = 1$$

$$35) (\lg x - 5) \cdot \lg x^3 + 18 = 0$$

$$36) \log_{x+2}(2x^2 + 18 - 5x) = 2$$

Тест по теме «Логарифмические уравнения».

Вариант 1

Часть А.

А1. Укажите промежуток, содержащий корень уравнения $\log_7(2x+5) = 2$

- 1) (0;5); 2) (5;15); 3) (15;25); 4) (25;100).

А2. Укажите промежуток, содержащий корень уравнения $\log_5 \log_2 \log_7 x = 0$

- 1) (0;5); 2) (5;15); 3) (15;25); 4) (25;100).

А3. Укажите промежуток, содержащий корень уравнения $\log_4(x-2) + \log_{\frac{1}{2}}(x-2) = \frac{1}{2}$

- 1) (-4;-2); 2) (-2;-1); 3) (-1;1); 4) (1;5).

А4. Найдите произведение корней уравнения $2 \log_4^2 x + \log_4 x - 1 = 0$

- 1) 1; 2) 0,5; 3) -4; 4) -0,5.

А5. Укажите число корней уравнения $\log_{\frac{1}{3}}(x^4 + 1) = \log_{\frac{1}{3}}(2x^2)$

- 1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3.

А6. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения $\lg(x-3) - \lg(7-x) = \lg 3$

- 1) (-7;0); 2) (0;3); 3) (5;8); 4) (11;14).

А7. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения $\lg(x+2) + \lg 5 = \lg(4-x)$

- 1) (-10;-8); 2) (-7;-5); 3) (-4;0); 4) (1;5).

А8. Решите уравнение $\lg^2 x + 2 \log_{100} x - 6 = 0$

- 1) ± 7 ; 2) 100; 0,001; 3) - 2; 6; 4) 10.

A9. Найдите корень уравнения $\lg(x^2 + x) - \lg x = \lg 3$

- 1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3.4

A10. Найдите сумму корней уравнения $\lg(x-1) + \lg(x+1) = 3 \lg 2 + \lg(x-2)$

- 1) 0; 2) 8; 3) 2; 4) 11.

Часть В.

B11. Решите уравнение $5 \cdot 10^{\lg x} = 7x - 15$.

B12. Решите уравнение $7 \cdot 5^{\log_5 x} = x + 21$.

B13. Решите уравнение $\log_7(8x - 20) - \log_7 2 = \log_7 3$.

B14. Решите уравнение $\log_9(20x - 16) - \log_9 4 = \log_9 18$.

B15. Решите уравнение $\log_5 x = \log_5 6 + \log_5 3$

B16. Решите уравнение $\log_5 x + \log_5 3 = \log_5 12$

B17. Найдите корень (или произведение корней, если их несколько) уравнения $\log_4(x^2 - 7x + 49) = \log_2(2x - 7)$

B18. Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения $\log_6(2x + 42) - \log_6(x - 9) = \log_6 x$

B19. Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения $\sqrt{2 - \log_3(4 + 6x - x^2)} = 0$

B20. Найдите корень (или произведение действительных, различных корней, если их несколько) уравнения $0,25 \log_2^2 x^4 - 3 \log_2 x^2 = 4$

B21. Найдите корень (или произведение корней, если их несколько) уравнения $\log_2^2 x^2 = 12 \log_2 8x - 28$

B22. Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения $|\log_3 x - 3| - |\log_9 x - 2| = 1$

B23. Решите уравнение $10^{1 - \lg x} = 100^{2 + \lg x}$

Тест по теме «Логарифмические уравнения».

Вариант 2.

Часть А.

А1. Укажите промежуток, содержащий корень уравнения $\lg \log_3 \log_5 x = 0$

- 1) (1;30); 2) (30;50); 3) (50;100); 4) (100;200).

А2. Укажите число корней уравнения $\log_{\frac{1}{3}}(x^4 - 1) = \log_{\frac{1}{3}}(2x^2 - 2)$

- 1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3.

А3. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения $\log_2(x+1) - \log_2(8-x) = 2$

- 1) (-3;1); 2) (1;6); 3) (6;8); 4) (8;11).

А4. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения $\log_2(7+x) - \log_2(1-x) = 2$

- 1) [-7;-4]; 2) [-4;-1]; 3) [-1;2]; 4) [2;5].

А5. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения $\lg 1 + \lg(3+x) = \lg(7-x)$

- 1) (-2;0); 2) (0;1,5); 3) (1,7;4); 4) (3;7).

А6. Решите уравнение $4\log_5^2(6-x) - 4\log_5(6-x) + 1 = 0$

- 1) ± 7 ; 2) 12; 3) $\pm \sqrt{17}$; 4) 3.

А7. Найдите корень уравнения $\lg(7+x) - \lg(3-x) = \lg 4$

- 1) 1; 2) -1; 3) 2; 4) -2.

А8. Найдите множество, которому принадлежит корень уравнения $\log_2(x+1) = 1 + 2\log_2 x$

- 1) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$; 2) $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$; 3) (1;2); 4) [2;3].

А9. Найдите сумму квадратов корней уравнения $\log_4 \log_3 \log_2(x^2 - 1) = 0$

- 1) 2; 2) 13; 3) 5; 4) 18.

А10. Найдите отношение большего корня уравнения $\log_{0,5}^2 4x + \log_2\left(\frac{x^2}{8}\right) = 8$ к меньшему корню.

- 1) 4; 2) 128; 3) 8; 4) 256.

Часть В.

В1. Решите уравнение $8 \cdot 3^{\log_3 x} = 13x - 6$.

В2. Решите уравнение $3 \cdot 10^{\lg x} = 5x - 11$.

В3. Решите уравнение $\log_2(15x - 10) - \log_2 5 = \log_2 13$.

В4. Решите уравнение $\log_5(12x + 8) - \log_5 4 = \log_5 23$.

В5. Решите уравнение $\log_6 x = \log_6 5 + \log_6 4$

В6. Решите уравнение $\log_7 x + \log_7 6 = \log_7 18$

В7. Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения $\log_3^2(x + 15)^4 = 16 \log_3(x + 15)$

В8. Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения $\log_2(x^2 - 3x - 20) = \log_2(4 - x)$

В9. Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения $\log_2^2 x^2 = 16 \log_2 8x - 60$

В10. Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения $\log_4(x^2 + 2x + 1) + \log_4(x^2 + 6x + 9) = 0$

В11. Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения $\log_x(x^3 - 8x^2 - 16x - 128 + x \cdot \sqrt[5]{x}) = 1,2$

В12. Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения $\log_7(x^2 - 8x + 16) + \log_7(x^2 + 4x + 4) = 2$

В13. Укажите число корней уравнения $\log_2(x - 6) = 0,5 \log_2 x$

Набор заданий для систематизации знаний для решения логарифмических уравнений

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
Решите уравнения	Решите уравнения	Решите уравнения	Решите уравнения
<p>1. $\log_{\frac{1}{2}}(3x-5) = -2$ $\bar{a})3; \bar{b})4; \bar{c})1; \bar{d})-2$</p> <p>2. $\log_3^2 x - \log_3 x = 2$ $\bar{a})\frac{1}{9}; \bar{b})3; \bar{c})\frac{1}{3}; \bar{d})3; \frac{1}{9}$</p> <p>3. $\log_2(x-5) + \log_2(x+2) = \log_2 18$ $\bar{a})-4; 7; \bar{b})4; -7; \bar{c})-4; \bar{d})7$</p> <p>4. $\log_5(3x-1) + \log_5(3x-5) = 1$ $\bar{a})0; -2 \bar{b})2; \bar{c})0; 2; \bar{d})-2$</p>	<p>1. $\log_{\frac{1}{5}}(2x-3) = -1$ $\bar{a})1; \bar{b})4; \bar{c})3; \bar{d})-4$</p> <p>2. $\log_{0,5}^2 x - \log_{0,5} x = 6$ $\bar{a})\frac{1}{4}; \bar{b})\frac{1}{8}; \bar{c})8; \bar{d})\frac{1}{8}; 4$</p> <p>3. $\log_3(x-1) + \log_3(x-2) = \log_3 2$ $\bar{a})3; \bar{b})0; -3; \bar{c})0; 3; \bar{d})-3$</p> <p>4. $\log_2(2x-2) + \log_2(x-1) = 3$ $\bar{a})1; -3 \bar{b})3; -1; \bar{c})3; \bar{d})1$</p>	<p>1. $\log_{\frac{1}{4}}(7x-5) = -2$ $\bar{a})1; \bar{b})2; \bar{c})3; \bar{d})-3$</p> <p>2. $\log_2^2 x + \log_2 x = 2$ $\bar{a})2; \frac{1}{4} \bar{b})-2; 1; \bar{c})\frac{1}{2}; 4; \bar{d})2; -1$</p> <p>3. $\log_4(x-3) + \log_4(x+1) = \log_4 21$ $\bar{a})-4; 6; \bar{b})6; \bar{c})4; \bar{d})4; -6$</p> <p>4. $\log_7(3x+1) + \log_7(2x-3) = 1$ $\bar{a})-2 \bar{b})-\frac{5}{6}; 2; \bar{c})\frac{5}{6}; -2; \bar{d})2$</p>	<p>1. $\log_{\frac{1}{3}}(4x-3) = -2$ $\bar{a})1; \bar{b})2; \bar{c})-3; \bar{d})3$</p> <p>2. $\log_{\frac{1}{3}}^2 x - \log_{\frac{1}{3}} x = 6$ $\bar{a})\frac{1}{9}; 27 \bar{b})9; \frac{1}{27} \bar{c})27; \bar{d})\frac{1}{9}$</p> <p>3. $\log_6(x-1) + \log_6(x+4) = 2$ $\bar{a})-5; 8; \bar{b})8; \bar{c})5; \bar{d})5; -8$</p> <p>4. $\log_2(2x-2) + \log_2(x-2) = 2$ $\bar{a})3 \bar{b})0; 3; \bar{c})0; -3; \bar{d})-3$</p>

Вариант 5	Вариант 6	Вариант 7	Вариант 8
Решите уравнения	Решите уравнения	Решите уравнения	Решите уравнения
1. $\log_{\frac{1}{2}}(2x-4) = -2$ а) 4; б) 2; в) 1; г) 3 2. $\log_3^2 x + \log_3 x = 12$ а) $\frac{1}{27}$; б) 81; в) 27; г) $\frac{1}{81}$; д) 81 3. $\log_2(3x-4) - \log_2(5-x) = 3$ а) -4; б) $\frac{1}{4}$; в) $-\frac{1}{4}$; г) 4 4. $\log_5(2x-1) + \log_5(4-x) = 1$ а) -3; б) 1,5; в) 3; г) 1,5; д) 3	1. $\log_7(4x-1) = 1$ а) 1; б) 2; в) 4; г) 3 2. $\log_{\frac{1}{2}}^2 x - 3\log_{\frac{1}{2}} x = -2$ а) 1; б) 2; в) 4; г) 2; д) $\frac{1}{2}$; е) $\frac{1}{4}$ 3. $\log_9(2x+3) - \log_9(x-2) = 1$ а) 3; б) -3; в) $\frac{1}{3}$; г) $-\frac{1}{3}$ 4. $\log_4(2x-2) + \log_4(x-2) = 1$ а) -3; б) 0; в) 3; г) 0; д) -3	1. $\log_3(2x-3) = 2$ а) 1; б) 2; в) 6; г) 3 2. $\log_{\frac{1}{3}}^2 x - \log_{\frac{1}{3}} x = 2$ а) $\frac{1}{9}$; б) 3; в) $\frac{1}{3}$; г) 9; д) $\frac{1}{9}$; е) 3; ж) $\frac{1}{9}$ 3. $\log_5(x-3) + \log_5(x+1) = 1$ а) -4; б) 2; в) 4; г) 2; д) -2 4. $\log_7(2x+3) + \log_7(3-x) = 1$ а) 2; б) $-\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{2}$; г) -2; д) $-\frac{1}{2}$; е) 2	1. $\log_2(3x-1) = 3$ а) 1; б) 2; в) 4; г) 3 2. $\log_2^2 x - \log_2 x = 12$ а) $\frac{1}{16}$; б) 8; в) $\frac{1}{8}$; г) 16; д) 8 3. $\log_2(x-2) + \log_2(x-3) = 1$ а) 4; б) 1; в) 4; г) -1; д) -4 4. $\log_3(2x+3) - \log_3(x-2) = 2$ а) 3; б) -3; в) -2; г) 2
Вариант 9	Вариант 10	Вариант 11	Вариант 12
Решите уравнения	Решите уравнения	Решите уравнения	Решите уравнения

<p>1. $\log_{\frac{1}{3}}(2x-1) = -2$ $\bar{a})5; \bar{b})4; \bar{c})1; \bar{d})0,5$</p> <p>2. $\log_3^2 x - \log_3 x = 6$ $\bar{a})\frac{1}{9}; \bar{b})27; \bar{c})27; \bar{d})\frac{1}{9}; \bar{e})9; \bar{f})\frac{1}{27}$</p> <p>3. $\log_2(2x-4) + \log_2(x-2) = 3$ $\bar{a})2; \bar{b})4; \bar{c})0; \bar{d})-4; \bar{e})4$</p> <p>4. $\log_8(2x-2) + \log_8(x-1) = 1$ $\bar{a})1; \bar{b})-3; \bar{c})3; \bar{d})-1; \bar{e})3; \bar{f})1; \bar{g})-2$</p>	<p>1. $\log_{\frac{1}{5}}(1-4x) = -2$ $\bar{a})0,25; \bar{b})-\bar{c})6; \bar{d})-0,25$</p> <p>2. $\log_2^2 x - 3\log_2 x = 4$ $\bar{a})\frac{1}{2}; \bar{b})\frac{1}{16}; \bar{c})16; \bar{d})\frac{1}{2}; \bar{e})16$</p> <p>3. $\log_5(x-2) + \log_5(x-1) = \log_5 2$ $\bar{a})3; \bar{b})0; \bar{c})-3; \bar{d})0; \bar{e})3; \bar{f})-3$</p> <p>4. $\log_2(3x-1) + \log_2(3x-5) = 5$ $\bar{a})-1; \bar{b})1; \bar{c})-3; \bar{d})3; \bar{e})1$</p>	<p>1. $\log_{\frac{1}{2}}(3x-1) = -1$ $\bar{a})3; \bar{b})2; \bar{c})1; \bar{d})-3$</p> <p>2. $\log_4^2 x + 2\log_4 x = 3$ $\bar{a})4; \bar{b})\frac{1}{64}; \bar{c})4; \bar{d})\frac{1}{4}; \bar{e})64; \bar{f})\frac{1}{64}$</p> <p>3. $\log_7 x - \log_7(17-4x) = \log_7 4$ $\bar{a})0; \bar{b})4; \bar{c})4; \bar{d})-4; \bar{e})-4; \bar{f})0$</p> <p>4. $\log_3(2x-1) + \log_3(5-x) = 2$ $\bar{a})2; \bar{b})2; \bar{c})5; \bar{d})0,5; \bar{e})5; \bar{f})2; \bar{g})3,5$</p>	<p>1. $\log_{\frac{1}{4}}(3x-2) = -2$ $\bar{a})1,5; \bar{b})2; \bar{c})3; \bar{d})6$</p> <p>2. $\log_{\frac{1}{2}}^2 x + 2\log_{\frac{1}{2}} x = 3$ $\bar{a})\frac{1}{8}; \bar{b})2; \bar{c})\frac{1}{2}; \bar{d})8; \bar{e})2; \bar{f})\frac{1}{8}$</p> <p>3. $\log_2(2x-2) + \log_2(4-x) = 2$ $\bar{a})-2; \bar{b})-3; \bar{c})2; \bar{d})2; \bar{e})3; \bar{f})3$</p> <p>4. $\log_8(2x-4) + \log_8(x-2) = 1$ $\bar{a})4; \bar{b})0; \bar{c})4; \bar{d})0; \bar{e})-4; \bar{f})-4$</p>
--	---	--	--

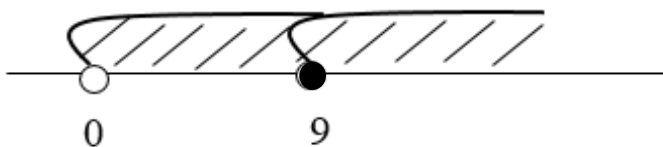
2. Логарифмические неравенства

Пример 1.1 Решить неравенство: $\log_{\frac{1}{3}} x \leq -2$

Решение: ОДЗ: $x > 0$

Заметим, что функция $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, при $x > 0$ убывает.

Приведем обе части неравенства к одному основанию, помня, что $(\frac{1}{3})^{-2} = 9$. Так как основания равны, то и степени тоже равны, поэтому основания можно опустить, получим: $x \geq 9$, а также помним про ОДЗ.



Ответ: $x \in (9; +\infty)$

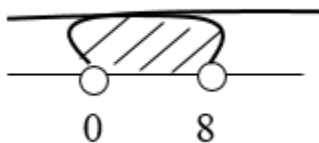
Пример 1.2 Решить неравенство: $\log_{15}(x - 3) + \log_{15}(x - 5) < 1$

Решение:

Приведем обе части неравенства к одному основанию, помня, что $1 = \log_{15} 15$, получим: $\log_{15}((x - 3)(x - 5)) < \log_{15} 15$. Так как основания равны, то и степени тоже равны, поэтому основания можно опустить, получим: $(x - 3)(x - 5) < 15$. Заметим, что выражение имеет смысл при ОДЗ: $\begin{cases} x - 3 > 0 \\ x - 5 > 0 \end{cases}$

Раскроем скобки и перенесем значения из правой части в левую изменив знак на противоположный, сократим, получим: $x^2 - 8x < 0$. Решим уравнение, получим:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x < 8 \end{cases}$$



Ответ: $0 < x < 8$

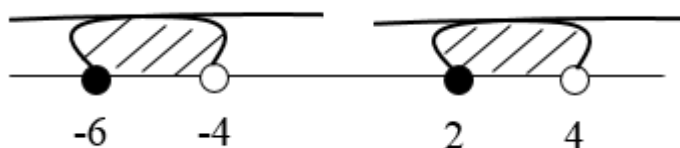
Пример 1.3 Решить неравенство: $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 2x - 8) \geq -4$

Решение:

Заметим, что функция $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, при $x < 0$ убывает, а также, что областью определения является неравенство вида $x^2 + 2x - 8 > 0$.

Приведем обе части неравенства к одному основанию, помня, что $-4 = \log_{\frac{1}{2}} 16$, а также, что при смене знака выражения меняется и знак всего неравенства, получим: $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 2x - 8) \leq \log_{\frac{1}{2}} 16$. Так как основания равны, то и степени тоже равны, поэтому основания можно опустить, получим: $x^2 + 2x - 8 \leq 16$.

Составим и решим систему неравенств: $\begin{cases} x^2 + 2x - 8 > 0 \\ x^2 + 2x - 8 \leq 16 \end{cases}$. Решим два квадратных неравенства: $x^2 + 2x - 8 > 0$ и $x^2 + 2x - 8 \leq 16$, получим корни: $x_1 < -4$, $x_2 > 2$, $x_3 \leq 4$ и $x_4 \geq -6$, делаем проверку. Установив области определения в неравенствах, получаем области определения системы неравенств.



Ответ: $-6 << x < -4; 2 < x \leq 4$

Примеры логарифмических неравенств для самостоятельного решения:

- 1) $\log_2 x < 3$
- 2) $\lg(x + 1) \leq 2$
- 3) $\log_2(x - 3) + \log_2(x - 2) \leq 1$
- 4) $\log_{\frac{1}{3}}(x - 2) + \log_{\frac{1}{3}}(12 - x) \geq -2$
- 5) $\log_{0.5}(2x + 6) \geq \log_{0.5}(x + 8)$
- 6) $\log_8(3x - 1) - \log_8(3 - x) > 0$
- 7) $\log_3 \sqrt{x^2 - 8} \geq \log_3 \sqrt{7x}$
- 8) $\log_{0.5}(3x - 4) > -1$

Заключение

Пособие предназначено для реализации ФГОС к минимуму содержания и уровню подготовки студентов по дисциплине «Математика». В рабочей программе указано, что — студент должен

иметь представление:

- о роли математики в современном мире, общности ее понятий и представлений;
- о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов, об идеях и методах математики;

знать:

- определение логарифма с произвольным основанием;
- основные логарифмические тождества;
- способы решения простейших логарифмических уравнений;

уметь:

- применять определение логарифма с произвольным основанием;
- применять основные логарифмические тождества при выполнении конкретных заданий;
- применять способы решения простейших логарифмических уравнений.

Все эти понятия и приемы решения уравнений и были представлены в пособии.

Используемая литература:

1. Алгебра. Базовый курс с решениями и указаниями (ЕГЭ, олимпиады, экзамены в ВУЗ). Учебно-методическое пособие / Золотарева Н.Д., Попов Ю.А., Семендяева Н.Л., Федотов М.В. – М.: Фойлис, 2010. – 568 с.
2. Большая электронная энциклопедия «Кирилл и Мефодий»: 2004. Е.Я.Штейн «Большая школьная энциклопедия» том 1; Москва, 2004
3. Я.В. Успенский «Очерк истории логарифмов»: Петроград: Научное книгоиздательство, 1923.
4. <https://school-science.ru/11/5/46803>
5. <https://rosuchebnik.ru/material/istoriya-vozniknoveniya-logarifmov/>
6. <https://nsportal.ru/shkola/algebra/library/2020/11/05/trenazher-dlya-vychisleniya-logarifmov-10-klass-0>
7. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы : учебник / Ш. А. Алимов [и др.]. – 3-е изд. – М. : Просвещение, 2016. – 463 с.
8. Бочкарева, В. Д. Алгебра : учеб.-методич. пособие / В. Д. Бочкарева. – Саранск : СВМО, 2012. – 40 с.
9. Глазенап, С. П. Пятизначные таблицы логарифмов с приложением других таблиц, упрощающих вычисления / С. П. Глазенап. – М. : Медиа, 2013. – 773 с.
10. Глухов, М. М. Задачник-практикум по алгебре / М. М. Глухов, А. С. Солодовников. – М. : Просвещение, 2009. – 276 с.
11. Лаппо, Л. Д. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень / Л. Д. Лаппо, М. А. Попов. – М. : Экзамен, 2020. – 335 с.
12. Миспахов, А. Ш. Логарифмические уравнения и неравенства : учеб. пособие / А. Ш. Миспахов. – Махачкала : ДГУНХ, 2018. – 27 с.
13. Шахмейстер, А. Х. Логарифмы : учеб. пособие / А. Х. Шахмейстер. – М. : Виктория плюс, 2016. – 861 с.