Санкт-Петербургское государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение "Пожарно-спасательный колледж "Санкт-Петербургский центр подготовки спасателей"

Мисяр Н.Н.

Потапов Д.И.

Методическая разработка по дисциплине «Математика»

«Показательная функции. Показательные уравнения и неравенства. Системы показательных уравнений».

Санкт-Петербург, 2022

Мисяр Н.Н., Потапов Д.И. Методическая разработка «Показательная функции. Показательные уравнения и неравенства. Системы показательных уравнений.» (для самостоятельной работы студентов) – Санкт-Петербург: СПб ГБПОУ "Пожарно-спасательный колледж "Санкт-Петербургский центр подготовки спасателей", 2022. - 30 с.

Составители: Мисяр Наталья Николаевна – преподаватель математики высшей категории, Потапов Дмитрий Иванович – преподаватель математики.

Методическая разработка «Показательная функции. Показательные уравнения и неравенства. Системы показательных уравнений.» (для самостоятельной работы студентов)

Цель данной методической разработки – помочь студентам лучше освоить понятия курса, научить решать задачи по этому разделу математики. Для закрепления теоретических знаний, приобретения навыков в решении задач и с целью самопроверки.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Аннотация

Создание электронной базы данных по преподаванию алгебры на I курсе по разделам «Показательная функция. Показательные уравнения и неравенства», «Системы показательных уравнений».

Данная методическая работа может быть использована как опорный конспект по указанным темам для учащихся, которые хотят восполнить пробелы в знаниях в связи с пропуском занятий, более глубоко усвоить пройденный материал, ознакомиться с уровнем заданий, предлагаемых для сдачи экзамена.

К работе прилагается дидактический материал в виде заданий для индивидуальной работы по материалам для сдачи экзамена и ЕГЭ.

Основные цели предлагаемой работы:

1. Формирование понятий о показательной функции, о степени с произвольным действительным показателем, о свойстве показательной функции, о графике функции, о симметрии относительно оси координат
2. Формирование умения решать показательное уравнение различными методами: уравниванием оснований, уравниванием показателей, вынесением общего множителя за скобки, введением новой переменной.
3. Овладение умением решать показательные неравенства различными методами.
4. Овладение навыками решения системы показательных уравнений.

Пояснительная записка

При решении показательных уравнений и неравенств часто возникают трудности, связанные со следующими особенностями:

- Незнание чёткого алгоритма решения показательных уравнений, неравенств и их систем;
- При решении показательных уравнений и неравенств, ученики производят преобразования, которые не равносильны исходным уравнениям и неравенствам;
- При решении показательного уравнения и неравенства введением новой переменной забывают возвращаться к обратной замене.

Цель данной работы: изучить теоретический материал о теме, проанализировать данную тему в учебниках по алгебре и началам анализа, систематизировать и обобщить методические рекомендации по решению показательных уравнений и неравенств. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- Изучить требования государственных стандартов по теме «Показательные уравнения и неравенства и их системы»;
- Проанализировать материал по теме в учебниках алгебры и начал анализа;
- Систематизировать методы решения показательных уравнений и неравенств;
- Систематизировать и обобщить методические особенности изучения данной темы.

Практическая значимость исследования заключается в том, что разработанные методические рекомендации по изучению показательных уравнений и неравенств могут быть использованы учителями. Весь теоретический материал по теме «Показательные уравнения и неравенства и их систем» сгруппирован, приведены алгоритмы решения и разобраны примеры. Данные материалы можно использовать, как в образовательном учреждении, так и для индивидуального обучения.

1. Показательная функция

Показательной функцией называется функция вида f(x)= a^x , где а – некоторое положительное действительное число, называемое основанием степени. При а=1 значение показательной функции при любом значении аргумента равно единице, и случай а=1 далее не будет рассматриваться.

Свойства:

1. Область определения функции – $x \in (-\infty;+\infty)$, т.е. вся числовая прямая.

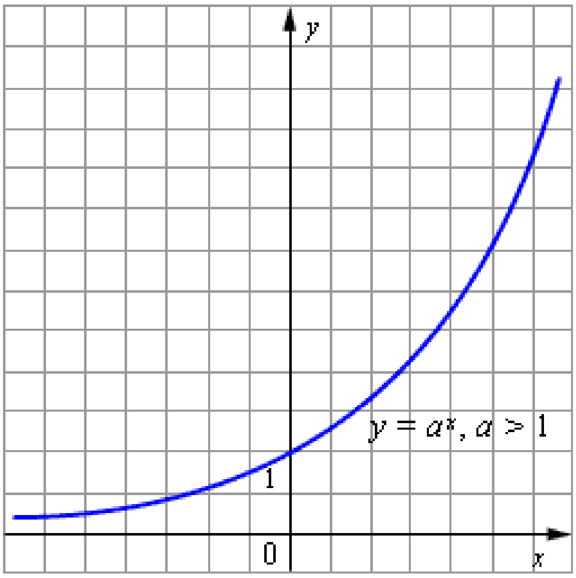
2. Область значения функции – $y \in (0;+\infty)$, т.е. множество всех положительных чисел.

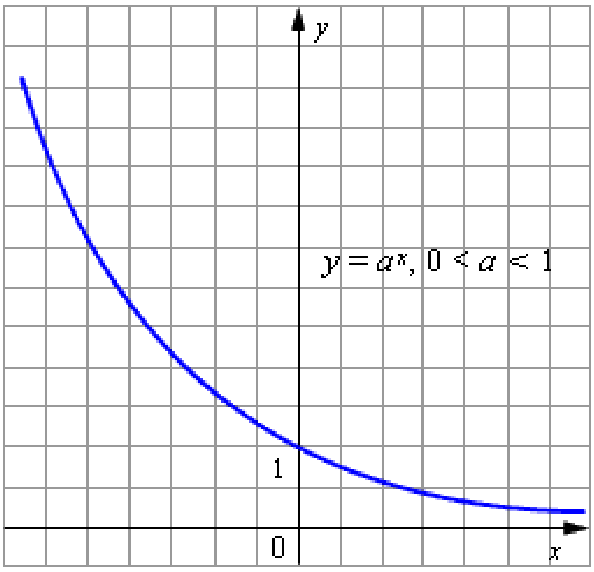
3. При а>1 функция монотонно возрастает, при а <1 монотонно убывает.

4. Показательная функция имеет обратную функцию, называемую логарифмической функцией.

5. График любой показательной функции пересекает ось 0Y в точке $(0;1)$.

6. График показательной функции – кривая, направленная вогнутостью вверх.





К общим свойствам показательной функции как при 0 < а < 1, так и при а > 1 относятся:

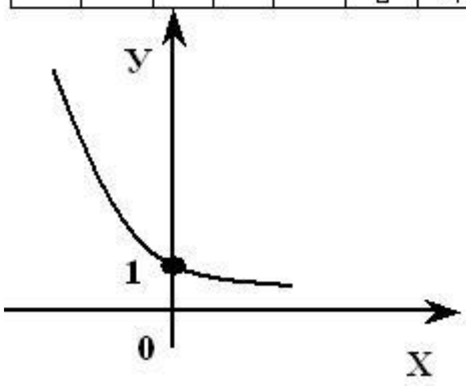
- ✓ $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- ✓ $a^x : a^y = a^{x-y}$
- ✓ $(ab)^x = a^x b^x$
- ✓ $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$
- ✓ $(a^x)^y = a^{xy}$
- ✓ $r \in Q$ и $a < b$, то
  $a^x < b^x$ при $r > 0$
  $a^x > b^x$ при $r < 0$
- ✓ $r, s \in Q$ и $r > s$, то
  $a^r > a^s$ при $a > 1$
  $a^r < a^s$ при $0 < a < 1$

1.1. Примеры построения и решения функций.

Пример 1: Построить графики функций: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ и $y = 2^x$.

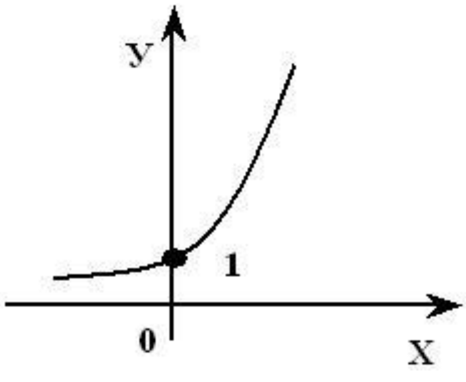
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, функция убывает, $0 < \frac{1}{2} < 1$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



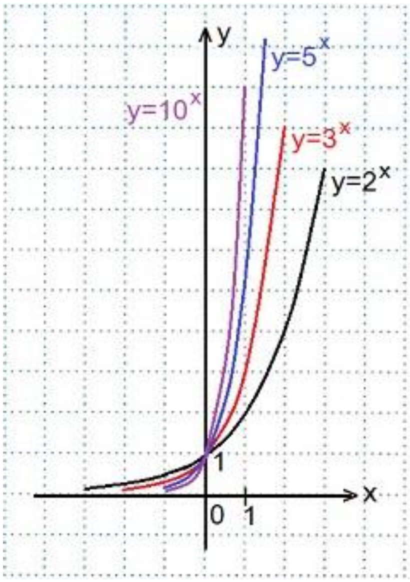
$y = 2^x$, функция возрастает, $2 > 1$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8



Пример 2: В одной координатной плоскости построить графики функций:

$y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = 5^x$, $y = 10^x$. Сделать выводы.



Выводы:

1) Переменная x может принимать любое значение $x \in (-\infty;+\infty)$, при этом значение y всегда будет больше нуля $y \in (0;+\infty)$.

2) Графики всех данных функций пересекают ось Oy в точке (0; 1), так как любое число в нулевой степени равно единице; с осью Ox графики не пересекаются, так как положительное число в любой степени не может быть равным нулю. Чем больше основание а (если a>1) показательной функции $y = a^x$, тем ближе расположена кривая к оси Oy.

3) Все данные функции являются возрастающими, так как большему значению аргумента соответствует и большее значение функции.

Пример 3. Найти область значений функции: $a) y = -2^x, b) y = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$.

a) $y = -2^x$

Область значений показательной функции y= 2^x – все положительные числа, т.е. 0< 2^x <+∞. Значит, умножая каждую часть двойного неравенства на (-1), получаем: — ∞<- 2^x <0.

Ответ: $y \in$ (-∞; 0).

b) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$

Область значений показательной функции y=$\left(\frac{1}{3}\right)^x$ – все положительные числа, т.е.

$0<\left(\frac{1}{3}\right)^x<+\infty$, тогда, прибавляя ко всем частям двойного неравенства число 1, получаем:

$0+1<\left(\frac{1}{3}\right)^x+1<+\infty+1;$

$1<\left(\frac{1}{3}\right)^x+1<+\infty.$

Ответ: $y\in(1;+\infty)$.

1.2. Задание для самостоятельной работы.

1. В одной координатной плоскости построить графики функций: $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x, y=\left(\frac{1}{3}\right)^x, y=\left(\frac{1}{5}\right)^x, y=\left(\frac{1}{10}\right)^x$. Сделать выводы.
2. Найти область значений функции: $y=2^{x+2}$; $y=3^{x+1}-5$; $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x-2$.

2. Показательные уравнения

Определение: Уравнение, содержащее неизвестное только в показателе

степени, называется показательным.

Существуют три вида показательных уравнений.

1. $a^{f(x)} = a^{g(x)}$;
2. $ka^{2f(x)} + ba^{f(x)} + c = 0, a^{f(x)} = y$;
3. $a^{f(x)} = g(x), y = a^{f(x)}, y = g(x)$.

При решении показательных уравнений необходимо помнить, что решение любого показательного уравнения сводится к решению простейших показательных уравнений.

Методы решения показательных уравнений:

- Метод уравнивания показателей;
- Метод введения новой переменной;
- Метод вынесения общего множителя за скобки;
- Метод почленного деления;
- Метод группировки.

2.1. Уравнения, решаемые их преобразованием $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

Алгоритм решения уравнения методом уравнивания показателей:

- Представить обе части показательного уравнения в виде степеней с одинаковыми основаниями;
- На основании теоремы, если $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, где $a > 0, a \neq 1$ равносильно уравнению вида $f(x) = g(x)$, приравниваем показатели степеней;
- Решаем полученное уравнение, согласно его виду (линейное, квадратное и т.д.);
- Записываем ответ.

Пример 1. $3^x = 81$;

Представим правую часть уравнения в виде $81 = 3^4$ и запишем уравнение, равносильное исходному $3^x = 3^4$, $x = 4$. Ответ: 4.

Пример 2. $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1} = \left(\frac{7}{3}\right)^{5x-3}$

Представим правую часть уравнения в виде $\left(\frac{3}{7}\right)^{3-5x}$ и перейдем к уравнению для показателей степеней $3x+1 = 3 - 5x$; $8x = 4$; $x = 0,5$. Ответ: 0,5.

Пример 3. $5^{x^2-3x+2}=1$

Представим правую часть данного уравнения в виде $1 = 5^0$ и перейдем к уравнению для показателей степеней $x^2-3x+2 = 0$, откуда легко получить решения x = 1 и x=2.

Ответ: 1 и 2.

Пример 4. $\frac{0{,}2^{x+0{,}5}}{\sqrt{5}}=\frac{0{,}04^x}{25}$

Заметим, что числа 0,2, 0,04 , √5 и 25 представляют собой степени числа 5. Воспользуемся этим и преобразуем исходное уравнение следующим образом:

$\frac{\left(5^{-1}\right)^{x+0{,}5}}{5^{0{,}5}}=\frac{\left(5^{-2}\right)^x}{5^2}$**,** откуда

$5^{-x-1} = 5^{-2x-2} \Leftrightarrow -x-1=-2x-2$, из которого находим решение

x = -1. Ответ: -1.

<u>Банк задач №1.</u> Решить уравнение:

$а)\left(\frac{1}{8}\right)^x\cdot 2^{x^2}=\frac{1}{4};$

$б)3^{4x^2-7x+31}\cdot 3^{3x^2-4x-1}=1;$

$в)\sqrt{7}^{\,x^2-1}\cdot 7^{\frac{x^2+x}{2}}=7\sqrt{7};$

$г)3\cdot 5^{x+3}+2\cdot 5^{x+1}=77;$

$д)23^{x-10}=17^{10-x};$

$е)27=\frac{3^{2x}}{3^{x+1}}\cdot\frac{9^{x-1}}{3^{2x}};$

$ж)9^{2\sqrt{x}}=3^{2x-6};$

$з)\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\left[\frac{9}{8}\right]^x=\frac{27}{64}.$

<u>Тест №1.</u> С выбором ответа. Минимальный уровень.

A_1 $3^{-x+2}=\frac{1}{9}.$	1) 0 2) 4 3) -2 4) -4
A_2 $3^{2x-8}=\sqrt{3}.$	1)17/4 2) 17 3) 13/2 4) -17/4
A_3 $3^{x^2-4x}=\frac{1}{27}.$	1) 3;1 2) -3;-1 3) 0;2 4) корней нет

A4 $2^{x+\frac{7}{x}} = 256.$	1) 7;1 2) корней нет 3) -7;1 4) -1;-7
A5 $12^{x^3-5x^2+6x} = 1.$	1) 0;2; 2) 0;2;3 3) 0 4) -2;-3;0
A6 $\left(\frac{2}{3}\right)^{x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{x-2}.$	1) -1 2) 0 3) 2 4) 1

Тест №2. С выбором ответа. Общий уровень.

A1 $3^{x^2} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{x} = 27.$	1) 3 2) -1;3 3) -1;-3 4) 3;-1
A2 $\left(0{,}5^{x-3}\right)^4 \cdot 2^x = 0{,}25.$	1) 14/3 2) -14/3 3) -17 4) 11
A3 $\frac{3^{4x^2-7x+31}}{3^{3x^2-4x-1}} = 1.$	1) 2;-1 2) корней нет 3) 0 4) -2;1
A4 $\sqrt{7}^{\,x^2-1} \div 7^{\frac{x^2+x}{2}} = 7\sqrt{7}.$	1) -4 2) 2 3) -2 4) -4;2
A5 $\left(\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{2}x^2-5x}\right)^2 \cdot 49^{-4x+2} = 7.$	1) 3 2) -3;1 3) -1 4) -1;3

2.2 Уравнения, решаемые разложением на множители.

Решение показательных уравнений методом вынесения общего множителя за скобки.

Пример 1.

Решить уравнение:

$$3^x + 3^{x+1} = 108$$

Т.к. 3^{x+1} равносильно $3^x \cdot 3$, запишем как

$$3^x + 3^x \cdot 3 = 108$$

Вынесем 3^x за скобку

$$3^x \cdot (1+3) = 108$$

$$3^x \cdot 4 = 108$$

$$3^x = \frac{108}{4} = 27$$

27 представим как 3^3, получим:

$$3^x = 3^3$$

$$x = 3$$

Ответ: $x = 3$.

Пример 2. $2^x - 2^{x-2} = 3$. Используя свойства степеней, запишем уравнение в виде

$2^x - 2^x \cdot 2^{-2} = 3$

$2^x - \frac{1}{4} \cdot 2^x = 3$

$2^x \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 3$

$2^x \cdot \frac{3}{4} = 3$

$2^x = 4$

$2^x = 2^2$

$x = 2$

Ответ: 2

Пример 3. $2 \cdot 3^{x+1} - 6 \cdot 3^{x-1} - 3^x = 9$.

Используя свойства степеней, запишем уравнение в виде

$2 \cdot 3^x \cdot 3 - 6 \cdot 3^x \cdot 3^{-1} - 3^x = 9$

$6 \cdot 3^x - 6 \cdot \frac{3^x}{3} - 3^x = 9$

$6 \cdot 3^x - 2 \cdot 3^x - 3^x = 9$ далее

$3^x \cdot (6 - 2 - 1) = 9$

$3 \cdot 3^x = 9$,

$3^{x+1} = 3^2$, т.е.

$x+1 = 2$,

x =1. Ответ: 1.

Пример 4. $3^{2y-1} + 3^{2y-2} - 3^{2y-4} = 315$

Применяя свойства степеней, вынесем за скобки в левой части уравнения 3^{2y}

$$3^{2y} \cdot 3^{-1} + 3^{2y} \cdot 3^{-2} - 3^{2y} \cdot 3^{-4} = 315$$

$$3^{2y} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{81}\right) = 315$$

$$3^{2y} \cdot \frac{35}{81} = 315$$

$$3^{2y} = \frac{315 \cdot 81}{35}$$

$$3^{2y} = 9 \cdot 81$$

$$3^{2y} = 3^6$$

$$2y = 6$$

$$y = 3$$

Ответ: 3

Пример 5. $6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$

Применяя свойства степеней, вынесем за скобки в левой части уравнения 6^x, а в правой части – 2^x.

Получим уравнение $6^x(1+6) = 2^x(1+2+4) \Leftrightarrow 6^x = 2^x$.

Так как $2^x > 0$ при всех x, можно обе части этого уравнения разделить на 2^x, не опасаясь при этом потери решений.

Получим $3^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Ответ: 0.

Пример 5. $9^x - 8 \cdot 3^x - 9 = 0.$

Решим уравнение методом разложения на множители.

Выделим квадрат двучлена

$$3^{2x} - 2 \cdot 3^x \cdot 4 + 16 - 25 = 0;$$

$$\left(3^x - 4\right)^2 - 25 = 0;$$

$$\left(3^x - 4 - 5\right)\left(3^x - 4 + 5\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x - 9 = 0 \\ 3^x + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 9 \\ 3^x = -1 < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow 3^x = 3^2 \Leftrightarrow x = 2.$$

Ответ: 2.

Банк задач №2. Решить уравнение

а) $48^x - 4^{2x+1} - 3^{x+1} + 12 = 0$.

б) $5^{2x-1} + 2^{2x} - 5^{2x} + 2^{2x+2} = 0$.

в) $3^x - 2^{x+2} = 3^{x-1} - 2^{x-1} - 2^{x-3}$.

г) $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$.

Тест №3 Минимальный уровень.

A_1 $5^{x-1} + 5^x - 5^{x+1} = -19$.	1) 1 2) 95/4 3) 0 4) -1
A_2 $3^{x+1} + 3^{x-1} = 270$.	1) 2 2) -4 3) 0 4) 4
A_3 $3^{2x} + 3^{2x+1} - 108 = 0$.	1) 0,2 2) 1,5 3) -1,5 4) 3
A_4 $2 \cdot 3^{x+1} - 6 \cdot 3^{x-1} - 3^x = 9$.	1) 1 2) -3 3) -1 4) 0
A_5 $2^x - 2^{x-4} = 15$.	1) -4 2) 4 3) -4;4 4) 2

Тест № 4 Общий уровень.

A_1 $(2^{2x}-1)(2^{4x}+2^{2x}+1)=7$.	1) ½ 2) 2 3) -1;3 4) 0,2
A_2 $3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1}$.	1) 2,5 2) 3;4 3) $\log_4 3/2$ 4) 0
A_3 $2^{x-1} - 3^x = 3^{x-1} - 2^{x+2}$.	1) 2 2) -1 3) 3 4) -3
A_4 $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.	1) 1,5 2) 3 3) 1 4) -4
A_5 $\left(\frac{3}{2}\right)^{2-2x} - \left(\frac{8}{27}\right)^{x-2} = 0$.	1) 2 2) -2 3) 5 4) 0

2.3.Уравнения, решаемые методом введения новой переменной

Алгоритм решения показательного уравнения методом введения новой переменной:

- Определить возможность переписать данное уравнение в новом виде, позволяющем ввести новую переменную;
- Вводим новую переменную;
- Решаем уравнение относительно новой переменной;
- Записываем ответ.

Приведение к квадратному уравнению.

$a^{2x} + a^x + b = 0$, такое уравнение решается методом введения новой переменной t.

$a^x = t$; $t^2 + t + b = 0$. Находим t_1 и t_2; затем в подстановку подставляем найденные t_1 и t_2; $a^x = t_1$, находим x_1; $a^x = t_2$, находим x_2.

Пример 1. $3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} = 0{,}2$.

Перепишем уравнение иначе: $\frac{3 \cdot (5^x)^2}{5} - 2 \cdot \frac{5^x}{5} = 0{,}2$

Обозначим $5^x = t > 0$, тогда

$\frac{3}{5} \cdot t^2 - \frac{2}{5} \cdot t = \frac{1}{5},$ т.е.

$3t^2 - 2t - 1 = 0$,

отсюда $t_1 = 1$, $t_2 = -\frac{1}{3}$ -не удовлетворяет условию $t > 0$. Итак,

$5^x = 1 = 5^0 \Leftrightarrow x = 0$.

Ответ: 0

Пример 2. $3^{x+2} + 9^{x+1} - 810 = 0$

Используя свойства степеней, перепишем уравнение в следующем виде:

$3^x \cdot 3^2 + (3^x)^2 \cdot 3^2 - 810 = 0$

Заменим $3^x = t, t > 0$, тогда

$9 \cdot t + 9 \cdot t^2 - 810 = 0$,

$t^2 + t - 90 = 0$,

Решая уравнения получим $t_1 = 9$, $t_2 = -10$ - не удовлетворяет условию $t > 0$. Значит,

$3^x = 9$

$3^x = 3^2$

$x = 2$

Ответ: 2

Пример 3. $5^{2x^2-1} - 3\cdot 5^{(x+1)(x+2)} - 2\cdot 5^{6(x+1)} = 0$

Перепишем уравнение в виде $5^{2x^2-1} - 3\cdot 5^{x^2+3x+2} - 2\cdot 5^{6x+6} = 0$ и разделим его обе части на $5^{6x+6} \neq 0$. Получим уравнение

$$5^{2x^2-1-6x-6} - 3\cdot 5^{x^2+3x+2-6x-6} - 2 = 0;$$

$$5^{2x^2-6x-7} - 3\cdot 5^{x^2-3x-4} - 2 = 0.$$

$2x^2-6x-7 = 2x^2-6x-8 +1 = 2(x^2-3x-4)+1$, т.е

$$5^{2(x^2-3x-4)+1} - 3\cdot 5^{x^2-3x-4} - 2 = 0.$$

Заменим

$$5^{x^2-3x-4} = t > 0;$$

$$5t^2 - 3t - 2 = 0.$$

Корни квадратного уравнения – $t_1 = 1$ и $t_2 < 0$, т.е. $5^{x^2-3x-4} = 1 = 5^0$,

$x^2-3x-4=0$

$x_1 = -1$, $x_2 = 4$.

Ответ: -1, 4.

Пример 4. $3\cdot 16^x - 5\cdot 36^x + 2\cdot 81^x = 0$

Перепишем уравнение в виде $3\cdot 4^{2x} - 5\cdot 4^x\cdot 9^x + 2\cdot 9^{2x} = 0$

и заметим, что оно является однородным уравнением второй степени.

Разделим уравнение на 4^{2x}, получим

$$3 - 5\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^x + 2\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^{2x} = 0,$$

Заменим $\left(\frac{9}{4}\right)^x = t > 0$ $\quad 2t^2 - 5t + 3 = 0$, где $t_1 = 1$, $\quad t_2 = \frac{3}{2}$.

$$\left(\frac{9}{4}\right)^x = 1 = \left(\frac{9}{4}\right)^0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$\left(\frac{9}{4}\right)^x = \frac{3}{2}, \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2x = 1, x = 0,5.$$

Ответ: 0; 0,5.

Банк задач № 3. Решить уравнение

а) $8 \cdot 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 1 = 0.$

б) $3\left(\sqrt{3}\right)^{2x} - 10\left(\sqrt{3}\right)^x + 3 = 0.$

в) $5 \cdot 0,2^{2x} + 9 \cdot 0,2^x - 2 = 0.$

г) $6^{4x} = 5 \cdot 6^{2x} + 6.$

Тест №5 Минимальный уровень.

A_1 $5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{2x} - 14 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x - 3 = 0.$	1) -0,2;2 2) $\log_5 2$ 3) $-\log_5 2$ 4) 2
A_2 $0,5^{2x} - 3\ 0,5^x + 2 = 0.$	1) 2;1 2) -1;0 3) корней нет 4) 0
A_3 $3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} = 0,2.$	1) 0 2) 1; -1/3 3) 1 4) 5
A_4 5^{2x}-5^x- 600 = 0.	1) -24;25 2) -24,5; 25,5 3) 25 4) 2
A_5 $25^x - 3 \cdot 5^x + 10 = 0.$	1) корней нет 2) 2;4 3) 3 4) -1;2

Тест № 6 Общий уровень.

A_1 $2^x - 3 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^x + 2 = 0.$	1) 2;1 2) ½;0 3)2;0 4) 0

A2 $2^x - (0,5)^{2x} - (0,5)^x + 1 = 0$	1) -1;1 2) 0 3) -1;0;1 4) 1
A3 $16^x - 50 \cdot 2^{2x} = 896.$	1) 64 2) -14 3) 3 4) 8
A4 $0{,}3^{3x} - 3 \cdot 0{,}3^{2x} + 3 \cdot 0{,}3^x = 1.$	1)-1 2) 1 3) -1;1 4) 0
A5 $27^x + 12^x = 2 \cdot 8^x.$	1) 0 2) 1 3) 0;1 4) корней нет

2.4.Метод почленного деления

Данный метод заключается в том, чтобы разделить каждый член уравнения, содержащий степени с одинаковыми показателями, но разными основаниями, на одну из степеней. Этот метод применяется для решения однородных показательных уравнений.

Пример 1.

Решить уравнение:

$$3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$$

Преобразуем уравнение:

$$3 \cdot 4^{2x} - 5 \cdot 4^x \cdot 9^x + 2 \cdot 9^{2x} = 0$$

Разделим данное показательное уравнение на $4^{2x} > 0$, получим:

$$3 - 5 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^x + 2 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{2x} = 0$$

Вводим новую переменную. Пусть $\left(\frac{9}{4}\right)^x = a, a > 0.$

$$2a^2 - 5a + 3 = 0$$

$$a_1 = 1 \qquad \left(\frac{9}{4}\right)^x = 1 \qquad x_1 = 0$$

$$a_2 = \frac{3}{2} \qquad \left(\frac{9}{4}\right)^x = \frac{3}{2} \qquad x_2 = \frac{1}{2}$$

Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

Пример 2.

Решить уравнение:

$$125^x + 20^x = 2^{3x+1}$$

Преобразуем уравнение:

$$5^{3x} + 5^x \cdot 2^{2x} = 2^{3x} \cdot 2$$

Разделим данное показательное уравнение на $5^{3x} > 0$, получим:

$$1 + \left(\frac{2}{5}\right)^{2x} - 2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{3x} = 0$$

Вводим новую переменную. Пусть $\left(\frac{2}{5}\right)^x = a, a > 0$.

$$2a^3 - a^2 - 1 = 0$$

$$2a^3 - 2a^2 + a^2 - 1 = 0$$

$$2a^2(a-1) + (a-1)(a+1) = 0$$

$$(a-1)(2a^2 + a + 1) = 0$$

$$a = 1 \qquad \left(\frac{2}{5}\right)^x = 1 \qquad x = 0$$

Ответ: $x = 0$.

<u>2.5.Метод группировки</u>

Способ группировки заключается в том, чтобы собрать степени с разными основаниями в разных частях уравнения, а затем разделить обе части уравнения на одну из степеней.

<u>Пример 1.</u>

Решить уравнение:

$$3 \cdot 2^{2x} + \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1} - 6 \cdot 4^{x+1} = -\frac{1}{3} \cdot 9^{x+2}$$

Сгруппируем слагаемые следующим образом:

$$\frac{1}{2} \cdot 9^{x+1} + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - 3 \cdot 2^{2x}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 9^x \cdot 9 + \frac{1}{3} \cdot 9^x \cdot 9^2 = 6 \cdot 4^x \cdot 4 - 3 \cdot 4^x$$

$$4{,}5 \cdot 9^x + 27 \cdot 9^x = 24 \cdot 4^x - 3 \cdot 4^x$$

$$9^x(4{,}5 + 27) = 4^x \cdot 21$$

$$9^x \cdot 31{,}5 = 4^x \cdot 21$$

Разделим данное показательное уравнение на $9^x > 0$, получим:

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{3}{2}$$

$$2x = -1$$

$$x = -0{,}5$$

Ответ: $x = -0{,}5$.

Пример 2.

Решить уравнение:

$$5 \cdot 7^{x-1} + 4 \cdot 3^x + 3^{x+1} - 2 \cdot 7^x = 0$$

Сгруппируем слагаемые:

$$4 \cdot 3^x + 3^{x+1} = 2 \cdot 7^x - 5 \cdot 7^{x-1}$$

$$3^{x-1}(4 \cdot 3 + 3^2) = 7^{x-1}(2 \cdot 7 - 5)$$

$$3^{x-1} \cdot 21 = 7^{x-1} \cdot 9$$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{x-1} = \frac{9}{21}$$

$$x - 1 = 1$$

$$x = 2$$

Ответ: $x = 2$.

Пример 3.

Решить уравнение:

$$3 \cdot 5^{-(4x+3)} - 2^{1-4x} + 5^{-(4x+2)} - 2^{-4x-1} = 0$$

Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$3 \cdot 5^{-4x-3} + 5^{-4x-2} = 2^{-4x+1} + 2^{-4x-1}$$

Сгруппируем слагаемые:

$$5^{-4x-3}(3 + 5) = 2^{-4x-3}(2^4 + 2^2)$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{-4x-3} = \frac{20}{8}$$

$$-4x - 3 = 1$$

$$x = -1$$

Ответ: $x = -1$.

3. Показательные неравенства

Неравенства, содержащие переменные в показателе степени, называются показательными.

Решение неравенств вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ основано на следующих утверждениях:

- если a>1, то неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству f(x)>g(x) ;
- если 0<a<1, то неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству f(x)<g(x).

Заметим, что, применяя какой-либо метод при решении неравенства, содержащего знак «>», можно этот же метод применять и при решении неравенств, содержащих знаки «<», «≥», «≤».

Показательные неравенства решаются теми же способами, что и показательные уравнения.

Пример1. Решить неравенство:

$$2^x < \frac{1}{8}$$

$$2^x < 2^{-3}$$

Так как 2>1, то функция возрастает, значит

$$x < -3$$

Ответ: $x \in (-\infty; -3)$.

Пример2. Решить неравенство:

$$3^{x^2 - x} < 9$$

$$3^{x^2 - x} < 3^2$$

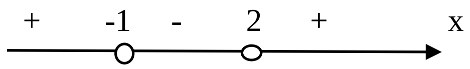
Так как 3>1, то функция возрастает, значит

$$x^2 - x < 2$$

$$x^2 - x - 2 < 0$$

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = 2$$



Ответ: $x \in (-1; 2)$.

Пример3. Решить неравенство:

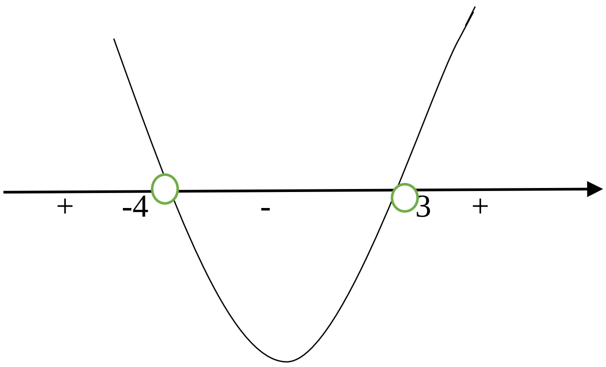
$$2^{2x-1} + 2^{2x-2} + 2^{2x-3} \geq 448$$
$$2^{2x-3} \cdot \left(2^2 + 2^1 + 1\right) \geq 448$$
$$2^{2x-3} \cdot 7 \geq 448$$
$$2^{2x-3} \geq \frac{448}{7}$$
$$2^{2x-3} \geq 64$$
$$2^{2x-3} \geq 2^6$$

Так как 2>1, то функция возрастает, значит

$$2x - 3 \geq 6$$
$$2x \geq 9$$
$$x \geq 4{,}5$$

Ответ: $x \in [4{,}5; +\infty)$.

Пример4. Решить неравенство:



$$9^x + 3^x + 12 > 0$$
$$3^{2x} + 3^x + 12 > 0$$
$$3^x = t, t > 0$$
$$t^2 + t + 12 = 0$$
$$t_1 = 3$$
$$t_2 = -4$$

$$t \;\; > 3$$

$t_2 < -4$, решений нет, так как t>0.

$$3^x > 3$$
$$x > 1$$

Ответ: $x \in (1; +\infty)$

Упражнения для самостоятельного решения

Задание 1.

1. $3^x > 9$; 2. $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{8}$; 3. $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 4$; 4. $5^x \leq \sqrt{5}$; 5. $3^{x^2-4} \geq 1$

6. $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-9} \leq 1$; 7. $\left(1\frac{3}{4}\right)^x < \frac{4}{7}$; 8. $\left(\sqrt{3}\right)^{4-x^2} \geq 1$; 9. $(0{,}1)^{x+1} \geq 100$; 10. $\left(\frac{1}{5}\right)^x \leq 125$.

Задание 2.

1. $2^{-x^2+3x} < 4$;

2. $\left(\frac{7}{9}\right)^{2x^2-3x} \ge \frac{9}{7}$;

3. $\left(\frac{1}{3}\right)^{5x^2+8x-4} \le 1$

4. $\left(\frac{13}{11}\right)^{x^2-3x} < \frac{121}{169}$;

5. $7^{x^2-2x-8} \ge 1$;

6. $\left(2\frac{2}{3}\right)^{6x^2+3x} \le 7\frac{1}{9}$.

Задание 3.

1. $4^x + 4^{1+x} \ge 5$;

2. $5^x + 5^{1+x} \ge 6$;

3. $2^{x-1} + 2^{2x+3} > 17$

4. $5^{2x} - 6\cdot 5^x + 5 > 0$;

5. $4^{2x} - 5\cdot 4^x + 4 \le 0$;

6. $5^{3x+1} - 5^{3x-3} < 624$

4. Системы показательных уравнений

При решении систем уравнений, содержащих показательные функции, чаще всего используют традиционные методы решения систем уравнений: метод подстановки и метод замены переменных.
Напомним, что систему двух уравнений с двумя переменными обозначают фигурными скобками и обычно записывают в виде:

$$\begin{cases} f_1(x,y) = g_1(x,y) \\ f_2(x,y) = g_2(x,y) \end{cases}$$

Несколько уравнений с двумя (или более) переменными образуют систему уравнений, если ставится задача найти множество общих решений этих уравнений. Множество упорядоченных пар, точек (в случае систем с тремя переменными) и т.д. значений переменных, обращающих в истинное равенство каждое уравнение системы, называется решением системы уравнений.
Решить систему уравнений – значит найти все её решения или доказать, что решений нет. Система называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если она не имеет ни одного решения.
Система уравнений называется определенной, если она имеет конечное число решений, и неопределенной, если она имеет бесчисленное множество решений.
Две системы называются равносильными, если они имеют одно и то же множество решений.

Пример 1:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 4^x + 4^y = 5 \end{cases}$$

Используем метод подстановки:

$$\begin{cases} x = 1 - y \\ 4^{1-y} + 4^y = 5 \end{cases}$$

Решим второе уравнение:

$$\frac{4}{4^y} + 4^y = 5$$

Заменим $4^y = t, \mathrm{t} > 0$

Получим уравнение:

$$\frac{4}{t} + t = 5 \quad \text{или}$$

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$t_1 = 1$$

$$t_2 = 4$$

Обратная замена:

$$4^y = 1 \qquad y_1 = 0 \qquad x_1 = 1$$

$$4^y = 4 \qquad y_2 = 1 \qquad x_2 = 0$$

Ответ: $(1;0), (0;1)$

Пример 2:

$$\begin{cases} 5^x - 3^y = 16 \\ 5^{\frac{x}{2}} - 3^{\frac{y}{2}} = 2 \end{cases}$$

Введем замену: $5^{\frac{x}{2}} = a, a \succ 0$; $3^{\frac{y}{2}} = b, b \succ 0$, получим систему:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 16 \\ a - b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)\cdot(a+b) = 16 \\ a - b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cdot(a+b) = 16 \\ a - b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 8 \\ a - b = 2 \end{cases}$$

$2a = 10$

Получим: $a = 5$

$b = 3$

Обратная замена:

$$\begin{cases} 5^{\frac{x}{2}} = 5 \\ 3^{\frac{y}{2}} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2} = 1 \\ \dfrac{y}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Ответ: $(2;2)$

Пример 3:

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2^x \cdot 9^y = 162 \\ 3^x \cdot 4^y = 48 \end{cases}$$

Перемножим уравнения данной системы. Получим:

$$\begin{cases} 6^x \cdot 36^y = 162 \cdot 48 \\ 3^x \cdot 4^y = 48 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 6^{x+2y} = 6^5 \\ 3^x \cdot 4^y = 48 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3^x \cdot 4^y = 48 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 2y \\ 3^{5-2y} \cdot 4^y = 48 \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 2y \\ \dfrac{3^5 \cdot 4^y}{9^y} = 48 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 2y \\ \left(\dfrac{4}{9}\right)^y = \dfrac{48}{3^5} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 2y \\ \left(\dfrac{4}{9}\right)^y = \left(\dfrac{4}{9}\right)^2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Ответ: (1;2).

Упражнения для самостоятельного решения

1. $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5^{x+y} = 25 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} x - y = 2 \\ 3^{x^2 - y} = \dfrac{1}{9} \end{cases}$; 3. $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3^{x-y} = 81 \end{cases}$;

4. $\begin{cases} 4^x \cdot 2^y = 32 \\ 3^{8x+1} = 3^{3y} \end{cases}$; 5. $\begin{cases} 3^{3x-2y} = 81 \\ 3^{6x} \cdot 3^y = 27 \end{cases}$; 6. $\begin{cases} 2^x + 2^y = 6 \\ 2^x - 2^y = 2 \end{cases}$;

7. $\begin{cases} 16^y - 16^x = 24 \\ 16^{x+y} = 256 \end{cases}$; 8. $\begin{cases} 5^{5+x} \cdot 3^y = 75 \\ 3^x \cdot 5^{y-1} = 3 \end{cases}$; 9. $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 4 \\ 3^y \cdot 2^x = 9 \end{cases}$;

10. $\begin{cases} 0{,}3^{10x^2 - 47x} = 0{,}3^{-10x-7} \\ 3{,}7^{x^2} = 3{,}7^4 \end{cases}$; 11. $\begin{cases} 5^x \cdot 3^y = 135 \\ 3^y - 5^{x+1} = 2 \end{cases}$; 12. $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3^{x-3y} = 27 \end{cases}$

5. Практическая работа

Вариант 1.

1.Постройте в одной координатной плоскости графики функций
$y=2^x, y=2^x-1$ *и* $y=2^{x+2}-1$.

2.Решите уравнение: а) $8^{-1}\cdot 2^{3x}=8$; б) $5^x-7\cdot 5^{x-2}=90$; в) $9^x+3^{x+1}=18$.

3.Решите неравенство: а) $\left(\frac{1}{9}\right)^x\geq 27$; б) $4^x+16>10\cdot 2^x$.

Вариант 2.

1.Постройте в одной координатной плоскости графики функций
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x, y=\left(\frac{1}{2}\right)^x+2$ *и* $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+2$.

2.Решите уравнение: а) $27^{-1}\cdot 3^{3x}=27$; б) $4^x-3\cdot 4^{x-2}=52$; в) $4^x-6\cdot 2^x+8=0$.

3.Решите неравенство: а) $0{,}5^x\leq 2\sqrt{2}$; б) $9^x+3\cdot 3^x>18$.

6. Дополнительные задания.

Простой уровень

1. $5^{x-2}=25^x$
2. $12*3^{x+2}=72$
3. $10^{2x+5}=10^{x-3}$
4. $4^{2x}=1024$
5. $2^{3x+6}-32^x=0$
6. $6^{2-x}=\frac{36}{6^{2x+3}}$
7. $4^{x-3}\geq 2^x$
8. $\left(\frac{1}{4}\right)^x<2$
9. $27^x>\frac{1}{3}$
10. $1{,}5^x<2{,}25$
11. $3^{2-x}<27$
12. $0{,}2^x\leq\frac{1}{25}$

Средний уровень

1. $5^{x+6}-3^{x+7}=43*5^{x+4}-19*3^{x+5}$
2. $3*5^{2x-1}2*5^{x-1}=0{,}2$

3. $9^{x^2-1} - 36 * 3^{x^2-3} + 3 = 0$
4. $4^x - 10 * 2^{x-1} - 24 = 0$
5. $2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}$
6. $2^{x^2-3} * 5^{x^2-3} = 0{,}01 * (10^{x-1})^3$
7. $5^{2x+1} > 5^x + 4$
8. $0{,}5^{x-2} > 6$
9. $25^x < 6 * 5^x - 5$
10. $4^x - 2^{2(x-1)} + 8^{\frac{2}{3}(x-2)} > 52$
11. $4^{\frac{1}{x}-1} - 2^{\frac{1}{x}-2} - 3 \leq 0$
12. $0{,}5^x \leq 0{,}25^{x^2}$

Уровень ЕГЭ

1. $5^{1+x^2} - 5^{1-x^2} = 24$
2. $3^{2x+4} + 45 * 6^x - 9 * 2^{2x+2} = 0$
3. $\dfrac{8^x + 2^x}{4^x - 2} = 5$
4. $3 * 16^x + 2 * 81^x = 5 * 36^x$
5. $9^x + 6^x = 2^{2x+1}$
6. $27^x - 13 * 9^x + 13 * 3^{x+1} - 27 = 0$
7. $\sqrt{9^x - 3^{x+2}} > 3^x - 9$
8. $0{,}008^x + 5^{1-3x} + 0{,}04^{1{,}5(x+1)} < 30{,}04$
9. $\left(\frac{3}{5}\right)^{13x^2} \leq \left(\frac{3}{5}\right)^{x^4+36} < \left(\frac{3}{5}\right)^{12x^2}$
10. $25 * 2^x - 10^x + 5^x > 25$
11. $0{,}5^{2\sqrt{x}} + 2 > 3 * 0{,}5^{\sqrt{x}}$
12. $\left|2^{4x^2-1} - 5\right| \leq 3$

7. Контрольная работа

1 вариант

1. Решить уравнение: а) $0{,}3^{3-2x} = 0{,}09$, б) $3^{x-2} - 3^{x-3} = 2$, в) $25^x + 4 \cdot 5^x$-5=0.
2. Решить неравенство: $(\frac{1}{7})^{x^2-9} \leq 1$.
3. Решить систему уравнений $\begin{cases} x - y = 1, \\ 4^{2x-3y} = 1 \end{cases}$
4. Решить неравенства:

   а) $\left(\sqrt{5}\right)^{x-6} < \frac{1}{5}$; б) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x} > 1\frac{1}{3}$.

5. Решить уравнения: $7^{x+1} + 3 \cdot 7^x = 2^{x+5} + 3 \cdot 2^x$.

2 вариант

1. Решить уравнение: а) $(\frac{1}{3})^{5-3x} = 9$, б) $4^{x-2} + 4^{x-1} = 5$, в) $9^x - 10 \cdot 3^x$+9=0.
2. Решить неравенство: $(1\frac{1}{5})^x < \frac{5}{6}$.
3. Решить систему уравнений $\begin{cases} x - 2y = 1, \\ 3^{x-3y} = 27 \end{cases}$
4. Решить неравенства: а) $\left(\sqrt[3]{3}\right)^{x+6} > \frac{1}{9}$; б) $\left(1\frac{2}{7}\right)^{x^2-4} \leq 1$.
5. Решить уравнение: $3^{x+3} + 3^x = 5 \cdot 2^{x+4} - 17 \cdot 2^x$

Литература

1. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учебник для общеобразовательных учреждений: базовый уровень/ Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева и др., 2012.
2. Дидактические материалы по алгебре и началам анализа для 11 класса /Б.М. Ивлев, С.М. Саакян, С.И. Шварцбурд. – М.: Просвещение, 2003.
3. Сканави М.И. Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы. / Учебное пособие. – М., 1994
4. Шабунин М.И. и др. Алгебра и начала анализа. Дидактические материалы для 10 – 11 классов. М. Мнемозина, 2000 г.
5. Письменный Д. Готовимся к экзамену по математике. М. Рольф, 1999 г.
6. Бабичева Т.А. Учебное пособие по дисциплине «Математика», «Решение показательных уравнений и неравенств» - Махачкала, 2019г.